Sard の定理の証明

paper3510mm

定義 1 (多重指数 multi-index)**.** 0 以上の整数の集合を $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ とし、$\mathbb{Z}_+$ の d 個の直積を ${\mathbb{Z}_+}^d$ とする。このとき、 ${\mathbb{Z}_+}^d$ の元を多重指数という。

多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ 、 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in {\mathbb{Z}_+}^d$ に対して、

$$\begin{aligned} \alpha \pm \beta &= (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_d \pm \beta_d) \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \\ \alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_d! \end{aligned}$$

と表す。また、 $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対し、

$$x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} \dots {x_d}^{\alpha_d}$$

とし、 d 変数関数 $f(x) = f(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対し、

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_d}^{\alpha_d}} f \\ &= \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_d}^{\alpha_d}} f \end{aligned}$$

と略記する。ただし、 $0^0 = 1$ と定め、 $\alpha_j = 0$ のとき $\partial {x_j}^{\alpha_d}$ は x_j で偏微分しないことを意味する。

多重指数を使えば、通常煩雑となってしまう多変数関数の Taylor の定理も次のように簡潔に書ける。

定理 2 (Taylor の定理)**.** $\mathbb{R}^d$ 上の C^N 級関数 $f(x)$ に対し、

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R_N$$

が成り立つ。ただし、剰余項は、

$$R_N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha \quad (0 < \theta < 1)$$

である。

さて、Sard の定理を証明する前に使用する定理を述べておく。

定理 3 (Fubini の定理)**.** N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度を μ_N とする ($N \geq 2$)。$\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ において部分集合 $A \subset \mathbb{R}^N$ が μ_N-可測のとき、

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mu_{N-1}(A \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{N-1}) = 0$$

ならば、

$$\mu_N(A) = 0$$

定理 4 (Lindelöf の被覆定理)**.** $\mathbb{R}^N$ の部分集合 E と開集合族 $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、

$$E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

ならば、 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の中から可算個の開集合 $\{G_{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を選んで、

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{\lambda_k}$$

とできる。

定理 5 (Sard の定理)**.** $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級ベクトル値関数 $f=(f_1,\dots,f_m):U\to\mathbb{R}^m$ に対し、その臨界点は”ほとんどない”。すなわち、 f の臨界点の集合 を

$$C=\{x\in U \mid \mathrm{rank}_x(f)<m\}$$

とすると、

$$\mu_m(f(C))=0$$

が成り立つ。

証明. これは、$n\geq 0$、$m\geq 1$ で意味をなす。

0 以上の整数 n に対して、Sard の定理が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

(I)$n=0$ のとき、

$U=\{0\}$ または $\emptyset$ で、 $f(C)=\{*\}$ または $\emptyset$ であるから、 $\mu_m(f(C))=0$。

(II) $n-1$ まで Sard の定理が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned} C_k &= (\text{階数が } k \text{ 以下の } f \text{ のすべての偏導関数が } 0 \text{ になるような点 } x \text{ の集合}) \\ &= \{x\in U \mid \frac{\partial^l f_j}{\partial x_{r_1}\dots\partial x_{r_l}}(x)=0; j=1,\dots,m, 1\leq l\leq k, 1\leq r_1\leq\dots\leq r_l\leq n\} \end{aligned}$$

とおく（$k=1,2,\dots$）と、

$$C\supset C_1\supset C_2\supset\dots\supset C_k\supset C_{k+1}\supset\dots$$

証明を次の三段に分ける

第一段：$\mu_m(f(C-C_1))=0$ が成立

第二段：$\mu_m(f(C_k-C_{k+1}))=0$ が成立

第三段：十分大きな k に対して、$\mu_m(f(C_k))=0$

（第一段）

$m\geq 1$ に対して、$\mu_m(f(C-C_1))=0$ を示す。

(i) $m=1$ のとき、（Fubini の定理が使えない）

$$f:U\to\mathbb{R}$$

であり、

$$C_1=\{x\in U \mid \frac{\partial f}{\partial x_r}(x)=0; r=1,\dots,n\}$$

となる。

$$\begin{aligned} C &= \{x\in U \mid \mathrm{rank}_x(f)<1\} \\ &= \{x\in U \mid \mathrm{rank}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_r}(x)\right\}=0\} \\ &= \{x\in U \mid \frac{\partial f}{\partial x_r}(x)=0; r=1,\dots,n\} \\ &= C_1 \end{aligned}$$

となるので、

$$f(C - C_1) = f(\emptyset) = \emptyset$$

よって、

$$\mu_1(f(C - C_1)) = \mu_1(\emptyset) = 0$$

(ii) $m \geq 2$ のとき、

「任意の $x \in C - C_1$ に対して、ある x の開近傍 $V(x) \subset U$ が存在して

$$\mu_m(f(V(x) \cap C)) = 0$$

となる」……(*)

ことを示せばよい。

なぜなら、(*) が成り立てば、$\{V(x) \mid x \in C - C_1\}$ は $C - C_1 \subset \mathbb{R}^n$ の開被覆であるから、Lindelö f の被覆定理より、$\{V(x) \mid x \in C - C_1\}$ の可算な部分被覆 $\{V_l\}_{l=1}^{\infty}$ が存在して、

$$C - C_1 \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} V_l$$

となる。これと、

$$^{\forall} l \in \mathbb{N}, \quad \mu_m(f(V_l \cap C)) = 0$$

より、

$$\begin{aligned} C - C_1 &= \bigcup_{l=1}^{\infty} (V_l \cap (C - C_1)) \\ &\subset \bigcup_{l=1}^{\infty} (V_l \cap C) \end{aligned}$$

だから、

$$f(C - C_1) \subset f\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} (V_l \cap C)\right) = \bigcup_{l=1}^{\infty} f(V_l \cap C)$$

よって、

$$\begin{aligned} \mu_m(f(C - C_1)) &\leq \mu_m\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} f(V_l \cap C)\right) \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu_m(f(V_l \cap C)) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mu_m(f(C - C_1)) = 0$$

と示せるからである。

さて、(*) を示す。$p \in C - C_1$ とする。

$p \notin C_1$ であるから、

$$^{\exists}(j, r), \ \frac{\partial f_j}{\partial x_r}(p) \neq 0$$

添え字を適当に入れ替えて、$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ としても一般性は失われない。

$U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された写像 $h : U \to \mathbb{R}^n$ を、

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_n)$$

とおくと、

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\det\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p)\right) = \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$$

よって、逆関数定理により、h は、p のある開近傍 $V \subset \mathbb{R}^n$ を、$h(p)$ の開近傍 $V' \subset \mathbb{R}^n$ へ微分同相に写す。

ここで、

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^m$$

を考える。

$$C' = (g \text{ の臨界点の集合})$$

とすれば、

$$C' = h(V \cap C)$$

であるから、

$$\begin{aligned} g(C') &= g(h(V \cap C)) = f \circ h^{-1}(h(V \cap C)) \\ &= f(V \cap C) \end{aligned}$$

一方、各 $(t, x_2, \dots, x_n) = y \in V'$ に対して、$h : V \simeq V'$ より

$$^{\exists !}\bar{x} \in V,\ h(\bar{x}) = y$$

このとき、$g = f \circ h^{-1}$ より $g \circ h = f$ だから、

$$\begin{aligned} g(y) &= g(h(\bar{x})) = f(\bar{x}) \\ &= (f_1(\bar{x}), \dots) \end{aligned}$$

ここで、$h(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = y$ であることから

$$f_1(\bar{x}) = t$$

よって

$$g(y) = (t, \dots) \in \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$$

となるから、対応

$$(t, x_2, \dots, x_n) \longmapsto g(t, x_2, \dots, x_n)$$

により写像

$$g^t : V' \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} \simeq \mathbb{R}^{m-1}$$

が得られる。g^t の定義より

$$g^t = g\,|_{\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}}$$

が成り立つ。帰納法の仮定から

$$C^t = (g^t \text{ の臨界点の集合}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

とおくと

$$\mu_{m-1}(g^t(C^t)) = 0 \tag{1}$$

となる。このとき $g = (x, g^t)$ より

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g_k^t}{\partial t} & \left(\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}\right) \end{pmatrix}$$

であるから

$$g(C') \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} = g^t(C^t)$$

(1) より

$$\mu_{m-1}(g(C') \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) = 0$$

となる。

$t \in \mathbb{R}$ は任意としてよいから、Fubini の定理より

$$\mu_m(g(C')) = 0$$

すなわち

$$\mu_m(f(V \cap C)) = 0$$

したがって、 $p \in C - C_1$ は任意より、(*) が示せた。（第一段終）

(第二段)

$p \in C_k - C_{k+1}$ とすると、 $p \notin C_{k+1}$ より

$$^\exists(r, s_1, \ldots, s_{k+1}), \quad \frac{\partial^{k+1} f_r}{\partial x_{s_1} \ldots \partial x_{s_{k+1}}}(p) \neq 0$$

これに対し、C^∞ 級写像 $w : U \to \mathbb{R}$ を

$$w(x) = \frac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \ldots \partial x_{s_{k+1}}}(x)$$

とおくと

$$w(p) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_{s_1}}(p) \neq 0$$

である。添え字を適当に入れ替えて、 $s_1 = 1$ としてよい。

C^∞ 級写像 $h : U \to \mathbb{R}^n$ を

$$h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_n)$$

とおくと

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\det\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p)\right) = \frac{\partial w}{\partial x_1}(p) \neq 0$$

よって、逆関数定理より、 h は、 p のある開近傍 $V \subset U$ を、 $h(p)$ のある開近傍 $V' \subset \mathbb{R}^n$ へ微分同相に写す。

ここに、 $x \in C_k \cap V$ のとき、 $w(x) = 0$ より

$$h(x) = (0, \dots) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

だから、 $h(C_k \cap V) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ となることに注意。

また、

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^m$$

を考え、

$$g^0 : V' \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^m$$
$$g^0 = g \mid_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}}$$

とする。 C^0 を g^0 の臨界点の集合とすると、帰納法の仮定から、

$$\mu_m(g^0(C^0)) = 0$$

さらに

$$h(C_k \cap V) \subset C^0$$

だから

$$\mu_m(g^0 \circ h(C_k \cap V)) \leq \mu_m(g^0(C^0)) = 0$$
$$\therefore \quad \mu_m(g^0 \circ h(C_k \cap V)) = \mu_m(f(C_k \cap V)) = 0$$

したがって、 $C_k - C_{k+1}$ の場合も、(*) が成り立ち、（第一段）(ii) と同様に、

$$\mu_m(f(C_k - C_{k+1})) = 0$$

が成立。（第二段終）

（第三段）

$(k+1)m > n$ すなわち $k > \dfrac{n}{m} - 1$ ならば

$$\mu_m(f(C_k \cap I^n)) = 0 \tag{**}$$

を示す。ここに、 $I^n \subset \mathbb{R}^n$ は一辺の長さが δ である n 次元立方体。

これがわかれば、第一段のときのように

$$f(C_k) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(C_k \cap I_i^n)$$

と表せることから

$$\begin{aligned}\mu_m(f(C_k)) &= \mu_m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} f(C_k \cap I_i^n)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_m(f(C_k \cap I_i^n)) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \mu_m(f(C_k)) = 0$$

となる。

(*) を示そう。 $f : C^\infty$ 級より、特に $f : C^{k+1}$ 級だから、Taylor の定理より

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{0<|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x) h^\alpha + R_{k+1}$$

ただし、 $0 < \theta < 1$ として

$$R_{k+1} = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha$$

$x \in C_k$ のとき、 $0 < |\alpha| \leq k$ で $\partial^\alpha f(x) = 0$ だから

$$f(x+h) = f(x) + R_{k+1}$$

ここで、 $x \in C_k \cap I^n$、$x + h \in I^n$ に対し

$$\begin{aligned} \|R_{k+1}\| &\leq \sum_{|\alpha|=k+1} \|\frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha\| \\ &= \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!}\|\partial^\alpha f(x+\theta h)\||h^\alpha| \end{aligned}$$

I^n は凸集合より $x + \theta h \in I^n$。$\partial^\alpha f(x)$ はコンパクト集合 I^n 上連続だから、 $\partial^\alpha f(x)$ は有界で

$$^\exists C_0 > 0, \quad \|\partial^\alpha f(x+\theta h)\| \leq C_0$$

が成り立ち

$$\|R_{k+1}\| \leq \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{C_0}{\alpha!}|h^\alpha|$$

さらに

$$\begin{aligned} |h^\alpha| &= |h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}| = |h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n} \\ &\leq \|h\|^{\alpha_1} \dots \|h\|^{\alpha_n} = \|h\|^{k+1} \end{aligned}$$

だから、 $C = \displaystyle\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{C_0}{\alpha!}$ とおけば

$$\|R_{k+1}\| \leq C\|h\|^{k+1}$$

となる。

さて、 I^n を一辺が $\dfrac{\delta}{r}$ である r^n 個の n 次元小立方体に分割する。 I_1 を $x \in C_k$ を含む小立方体とすると、 I_1 の任意の点は $\|h\| \leq \sqrt{n}\,\dfrac{\delta}{r}$ となる h を使って、 $x + h$ とかける。

よって、

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x)\| &= \|R_{k+1}\| \\ &\leq C\|h\|^{k+1} \\ &\leq C\left(\sqrt{n}\,\frac{\delta}{r}\right)^{k+1} = \frac{a}{r^{k+1}} \end{aligned}$$

ただし $a = C(\sqrt{n}\ \delta)^{k+1}$ とおいた。

このことから、 $f(I_1)$ は $f(x)$ を中心とする一辺 $\dfrac{2a}{r^{k+1}}$ の立方体に含まれることがわかる。分割した r^n 個の小立方体それぞれに対し、同様に考えれば、 $f(C_k \cap I^n) \subset f(I^n)$ は高々 r^n 個の立方体の和で全体積 V が

$$V \leq r^n \left(\frac{2a}{r^{k+1}} \right)^m = (2a)^m r^{n-(k+1)m}$$

となるものに含まれる。

よって、 $(k+1)m > n$ のとき

$$\mu_m(f(C_k \cap I^n)) \leq V \leq (2a)^m r^{n-(k+1)m}$$

で $r \to \infty$ のとき $r^{n-(k+1)m} \to 0$ より

$$\mu_m(f(C_k \cap I^n)) = 0$$

したがって (**) が示せた。（第三段終）

以上第一段〜第三段より

$$C = (C - C_1) \cup (C_1 - C_2) \cup \cdots \cup (C_{k-1} - C_k) \cup C_k$$

から

$$f(C) = f(C - C_1) \cup \cdots \cup f(C_{k-1} - C_k) \cup f(C_k)$$

$$\therefore \quad \mu_m(f(C)) \leq \mu_m(f(C - C_1)) + \cdots + \mu_m(f(C_{k-1} - C_k)) + \mu_m(f(C_k)) = 0$$

$$\therefore \quad \mu_m(f(C)) = 0$$

これで Sard の定理が示せた。 □

参考文献

[1] J.W. ミルナー，微分トポロジー講義，シュプリンガー・フェアラーク東京，2012

[2] 足立正久，埋め込みとはめ込み，岩波書店，1984

[3] 坪井俊，幾何学 I 多様体入門，東京大学出版会，2005

[4] 松島与三，多様体入門，裳華房，1965

[5] Sard, Arthur. The measure of the critical values of differentiable maps. Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), no. 12, 883–890. http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183504867.

この pdf は、[4] に載っている証明に論理的な間違いがある疑いがうまれたことをきっかけに製作された。証明は主に、[1] と [2] に沿った。[5] は Sard の定理の原論文である。