# 2018 解析 1 演習
# 第 2 回

2018 年 4 月 20 日

## 1　問題

1.$\mathbb{R}$ の左半開区間の有限和であるような集合全体として定義される集合族 $\mathcal{F}$ は有限加法族であることを示せ．

2. $\Lambda$ を空でない添字集合とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$\mathcal{F}_\lambda$ が $X$ 上の $\sigma$ 加法族である時，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ も $X$ 上の $\sigma$ 加法族であることを示せ．

3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間，$E_n \in \mathcal{M}(n \in \mathbb{N})$ とする．この時，

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

を示せ．また，$\mu(X) < \infty$ ならば

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

を示せ．

4.$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$x$ に台をもつ Dirac のデルタ測度 $\delta_x$ が $(X, \mathcal{M})$ 上の測度であることを確かめよ．

5. $X \neq \emptyset$ を高々可算集合とし，測度空間 $(X, 2^X, \mu)$ を考える．ある関数 $\varphi : X \to [0, \infty]$ が存在して，

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \varphi(x)$$

とかけることを示せ．

# 2　解答

## 2.1

1.$\mathbb{R}$ の左半開区間の有限和であるような集合全体として定義される集合族 $\mathcal{F}$ は有限加法族であることを示せ．

*Proof.* (i)$\emptyset \in \mathcal{F}$ は OK.
(ii)$A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ の時，各 $A_j$は左半開区間の有限和なので，$A_1 \cup A_2$も $\mathcal{F}$ に属する．　$\therefore A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$
(iii)$A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ の時, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.
実際,$A_1 = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m} I_{k,1} \cap I_{l,2}$ であり，これは直和.
$I_{k,1} \cap I_{l,2}$は左半開区間である．よって $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$
帰納的に $(1 \leq k \leq n)$ の時 $A_k \in \mathcal{F}$ ならば, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$
$A \in \mathcal{F}$ とする．$A$ を左半開区間 $I_k$を使って，　$\bigcup_{k=1}^{n} I_k$と書く．　これは直和であり，各 $I_k$は左半開区間とかける．
De morgan の法則により　$A^c = \bigcap_{k=1}^{n} {I_k}^c$
左半開区間 $I_k$の補集合　${I_k}^c$は左半開区間の直和としてかけるので，${I_k}^c \in \mathcal{F}$
$\therefore A^c = \bigcap_{k=1}^{n} {I_k}^c \in \mathcal{F}$

□

## 2.2

2. $\Lambda$ を空でない添字集合とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$\mathcal{F}_\lambda$ が $X$ 上の $\sigma$ 加法族である時，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ も $X$ 上の $\sigma$ 加法族であることを示せ．
解答

*Proof.* (i)$\forall \lambda \in \Lambda$に対し，　$\emptyset \in \mathcal{F}_\lambda$より, $\emptyset \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$
(ii)$A \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$とする．このとき, $\forall \lambda \in \Lambda$に対し，$A \in \mathcal{F}_\lambda$である．
$\mathcal{F}_\lambda$は$\sigma$加法族より，$A^c \in \mathcal{F}_\lambda$であり，
これが任意の　$\lambda \in \Lambda$で成立するので，　$A^c \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$

(iii)$A_n \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda (n \in \mathbb{N})$ とする．
　$\forall \lambda \in \Lambda$に対し，$A_n \in \mathcal{F}_\lambda$である．
各 $n \in \mathbb{N}$ についてこれが成り立ち，$\mathcal{F}_\lambda$は$\sigma$加法族なので，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\lambda$が成り立つ．

$\lambda \in \Lambda$は任意より，　$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$

以上から $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ も $X$ 上の $\sigma$ 加法族である． □

## 2.3

3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間，$E_n \in \mathcal{M}(n \in \mathbb{N})$ とする．この時，

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

を示せ．また，$\mu(X) < \infty$ ならば

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

を示せ．

(1) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} E_n$ について．

$\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} E_n$の定義より

$$\varliminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$$

ここで　$A_k$を　$\displaystyle A_k := \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$と書くと

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$A_k \subset A_{k+1}$より　増加列に対する測度の連続性から，

$$\begin{aligned} \mu(\varliminf_{n\to\infty} E_n) &= \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \end{aligned}$$

今，$A_k = E_n(\forall n \geq k)$ より，測度の単調性から

$$\mu(A_k) \leq \mu(E_n) \quad (\forall n \geq k)$$

故に，inf をとって

$$\mu(A_k) \leq \inf_{n\geq k} \mu(E_n) \quad (\forall n \geq k)$$

従って，

$$\begin{aligned} \mu(\varliminf_{n\to\infty} E_n) &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} \mu(E_n) \\ &=: \varliminf_{n\to\infty} \mu(E_n) \end{aligned}$$

よって

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

が示された．

(2) $\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n$について

ここで, $B_k$を　$B_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$と書くと

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

$B_k \supset B_{k+1}$及び，$B_1 \subset X$ かつ　$\mu(B_1) \leq \mu(X) < \infty$

故に，測度の減少列に対する連続性から，

$$\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)$$

$B_k \supset E_n (\forall n \geq k)$ より，　$\mu(B_k) \geq \mu(E_n)$ が任意の $n \geq k$ で成り立つので, sup をとれば

$$\mu(B_k) \geq \sup_{n\geq k} \mu(E_n)$$

従って，

$$\begin{aligned}\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n) &= \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \\ &\geq \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} \mu(E_n) \\ &=: \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(E_n)\end{aligned}$$

よって $\mu(X) < \infty$ ならば

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

が示された．

## 2.4

4.$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$x$ に台をもつ Dirac のデルタ測度 $\delta_x$ が $(X, \mathcal{M})$ 上の測度であることを確かめよ．

解答

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$

で表される $\delta_x$ が $(X, \mathcal{M})$ 上の測度であること，つまり測度の条件を満たしていることをみる．

(i)$\delta_x(\emptyset) = 0$ は $x \notin \emptyset$ より OK.

(ii)$E_n \in \mathcal{M} (n \in \mathbb{N}), E_n \cap E_m = \emptyset$ とする．$(n \neq m)$

$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$の時，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，$x \in E_{n_0}$である．故に,$\delta_x(E_{n_0}) = 1$
この時，互いに素の条件より，$x \notin E_n(n \neq n_0)$ よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(E_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \delta_x(E_n) = \delta_x(E_{n_0}) = 1$$

また，$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$より,$\delta_x(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$
ゆえに,$\delta_x(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(E_n)$

次に，$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，つまり$\delta_x(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$ とする．
この時，任意の $n$ に対して，$x \notin E_n$なので,$\delta_x(E_n) = 0$
したがって,$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(E_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \delta_x(E_n)$
よって，

$$\delta_x(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(E_n)$$

(ii) より完全加法性がわかり，$\delta_x$は $(X, \mathcal{M})$ 上の測度である．

## 2.5

5．$X \neq \emptyset$ を高々可算集合とし，測度空間 $(X, 2^X, \mu)$ を考える．ある関数 $\varphi : X \to [0, \infty]$ が存在して，

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \varphi(x)$$

とかけることを示せ．
解答
$\varphi(x) = \mu(\{x\})$ ととれば良い．
実際，$A \in 2^X$とすると，$X$ は高々可算なので $A$ も高々可算．
ゆえに $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}, \{x_k\} \cap \{x_l\}(k \neq l)$ と $A$ は可算個の元で書けるので，

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{x\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x_k) = \sum_{x \in A} \varphi(x)$$