2018 解析 1 演習
第 3 回

2018 年 4 月 27 日

1　問題

1.$(X.\mathcal{M})$ を可測空間，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n \in \mathcal{M}$ かつ$\mu(A_n) = 0$ であるとき,$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ を示せ.

2. μを数え上げ測度とした測度空間 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ を考える．$A_n \supset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$ であるが,$\mu(\bigcap_{k=1}^{n} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ とはならない例を挙げよ.

3. X を空でない集合,Λを添字集合とし,Γ_λを X 上の外測度とする．$A \in 2^X$に対して，
$\Gamma(A) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \Gamma_\lambda(A)$ と置くと,Γは X 上の外測度となることを示せ.

4.(像測度)$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間，Y を空でない集合，$\varphi : X \to Y$ とする．
(1)$\mathcal{G} = \{E \subset Y \mid \phi^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ は Y 上のσ加法族となることを示せ.
(2)$E \in \mathcal{G}$ に対して,$\nu(E) = \mu(\phi^{-1}(E))$ と定める．この時,νは $(Y, \mathcal{G})$ 上の測度であることを示せ.

5.測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ が有限，つまり,$\mu(\mathbb{R}) < \infty$ であるとする．但し，$\mathcal{B}$ は $Borel\sigma$加法族とする．$\mathbb{R}$ 上の関数 F を

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad (x \in \mathbb{R})$$

により定める.

(1)F は $\mathbb{R}$ 上非減少かつ右連続であることを示せ．但し，F が $\mathbb{R}$ 上非減少かつ右連続であるとは,$\lim_{\lambda\downarrow 0} F(x+\lambda) = F(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つことである.
(2)点 $x_0 \in \mathbb{R}$ において,$\mu(\{x_0\}) = 0$ であるための必要十分条件は F が x_0で連続であることを示せ.

2 解答

2.1

1.$(X.\mathcal{M})$ を可測空間，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n \in \mathcal{M}$ かつ$\mu(A_n) = 0$ であるとき,$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ を示せ.

解答
測度の可算加法性より，

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

2.2

2. μを数え上げ測度とした測度空間 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ を考える．$A_n \supset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$ であるが,$\mu(\bigcap_{k=1}^{n} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ とはならない例を挙げよ.

解答
$A_n = \{n, n+1, \cdots\}$ と置くと，$A_n \supset A_{n+1}$であり,$\mu(A_n) = +\infty$,故に $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$
一方，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ より,$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\emptyset) = 0$
故に，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

2.3

3. X を空でない集合,Λを添字集合とし,Γ_λを X 上の外測度とする．$A \in 2^X$に対して，
$\Gamma(A) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \Gamma_\lambda(A)$ と置くと,Γは X 上の外測度となることを示せ.

解答
Γ が外測度の 3 つの性質を確認する．(証明の段階で，Γ_λ が外測度であることをうまく使う.)
(i)$\Gamma(\emptyset) = 0$
(ii)(単調性) $A \subset B$ ならば,$\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$
(iii)(可算劣加法性) $\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$

Proof. (i)$\varepsilon > 0$ を任意にとる．各$\lambda \in \Lambda$に対し,$0 \leq \Gamma_\lambda(\emptyset) = 0 < \varepsilon$.
故に，各 Λ上λについて,sup をとれば,$0 \leq \Gamma(\emptyset) < \varepsilon$,
εは任意より,$\Gamma(\emptyset) = 0$

(ii)$A, B \in 2^X$，$A \subset B$ とする．各$\lambda \in \Lambda$に対し，

$$\Gamma_\lambda(A) \leq \Gamma_\lambda(B) \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_\lambda(B) = \Gamma(B)$$

最右辺$\Gamma(B)$ は$\lambda \in \Lambda$に依らないので，最左辺のλについて$\sup$をとれば$\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$

(iii)$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$とし，各$\lambda \in \Lambda$に対し,$\Gamma$の定義に注意すると

$$\begin{aligned}\Gamma_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_\lambda(A_n) \quad (\because \text{外測度}\Gamma_\lambda\text{の可算劣加法性}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_\lambda(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n) \quad (\because \Gamma\text{の定義})\end{aligned}$$

最左辺の λについて,$\sup$ をとれば,

$$\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$$

以上 (i)(ii)(iii) より，Γ が外測度であることがわかった． □

2.4

4.(像測度)$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間，Y を空でない集合，$\varphi : X \to Y$ とする．
(1)$\mathcal{G} = \{E \subset Y \mid \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ は Y 上のσ加法族となることを示せ.
(2)$E \in \mathcal{G}$ に対して,$\nu(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))$ と定める．この時,νは $(Y, \mathcal{G})$ 上の測度であることを示せ.

解答.
(1)

Proof. $\mathcal{G}$ がσ加法族の 3 つの性質を満たしているか調べる．
(i)$\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{M}$ より,$\emptyset \in \mathcal{G}$
(ii)$E \in \mathcal{G}$ とすると,$\varphi^{-1}(E^c) = (\varphi^{-1}(E))^c$
$\because x \in \varphi^{-1}(E^c) \Leftrightarrow \varphi(x) \in E^c \Leftrightarrow \varphi(x) \notin E \Leftrightarrow x \notin \varphi(E) \Leftrightarrow x \in (\varphi(E))^c$
$\varphi^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ より，その補集合も $\mathcal{M}$ に入る. $(\varphi^{-1}(E))^c \in \mathcal{M}$
$\therefore E^c \in \mathcal{G}$
(iii)$A_n \in \mathcal{G}, n \in \mathbb{N}$ とする．
$\varphi^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(A_n) \in \mathcal{M} \quad (\because \varphi^{-1}(A_n) \in \mathcal{M}$ であり，$\mathcal{M}$ はσ加法族$)$
よって，$\bigcup_{k=1}^{n} \in \mathcal{G}$
以上から，$\mathcal{G}$ は Y 上のσ加法族

□

(2) ν が測度の二つの性質を満たすか調べる．

(i)$\mu(\emptyset) = 0$

(ii)(測度の完全可算加法性)$E_n \cap E_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ であるならば，$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$

Proof. (i) $\nu(\emptyset) = \mu(\varphi^c(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$

(ii)$E_n \in \mathcal{G}, n \in \mathbb{N}$，$E_n \cap E_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ とする．

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\varphi^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(E_n))$$

ここで，$E_n \cap E_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ より

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\varphi^{-1}(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

□

2.5

5.測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ が有限，つまり，$\mu(\mathbb{R}) < \infty$ であるとする．但し，$\mathcal{B}$ は $Borel\sigma$加法族とする．$\mathbb{R}$ 上の関数 F を

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad (x \in \mathbb{R})$$

により定める．

(1)F は $\mathbb{R}$ 上非減少かつ右連続であることを示せ．但し，F が $\mathbb{R}$ 上非減少かつ右連続であるとは，$\lim_{\lambda \downarrow 0} F(x + \lambda) = F(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つことである．

(2)点 $x_0 \in \mathbb{R}$ において，$\mu(\{x_0\}) = 0$ であるための必要十分条件は F が x_0で連続であることを示せ．

解答.

Proof. (1) 単調性： $x' > x$ の時，$(-\infty, x] \subset (-\infty, x']$ より，測度の単調性から

$$\begin{aligned} F(x) &= \mu((-\infty, x]) \\ &\leq \mu((-\infty, x']) \\ &= F(x') \end{aligned}$$

$F(x) \leq F(x')$ より，単調性がわかった．

右連続性: まず，$\lim_{n\to\infty} F(x+\dfrac{1}{n}) = F(x)$ を示す．

$A_n = (-\infty + \frac{1}{n}]$ と置くと，$A_n \supset A_{n+1}$であり，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, x]$

$\mu(\mathbb{R}) < \infty$ より，単調減少列に対する測度の連続性が成り立つ．

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(x+\frac{1}{n})$$

$\varepsilon > 0$ を任意にとる．この時，ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して，$0 \leq F(x+\frac{1}{N_\varepsilon}) < \varepsilon$とかける．
故に，$0 < \lambda < \frac{1}{N_\varepsilon}$ならば，$F$ の単調性より，

$$0 \leq F(x+\lambda) - F(x) \leq F(x+\frac{1}{N_\varepsilon}) - F(x) < \varepsilon$$

したがって，F は右連続である． □

(2)

Proof. $\delta > 0$ に対して,μの完全加法性と，問題の仮定$\mu(\mathbb{R}) < \infty$ より，

$$F(x_0) - F(x_0 - \delta) = \mu((-\infty, x_0]) - \mu((-\infty, x_0 - \delta]) = \mu((x_0 - \delta, x_0])$$

ここで $\delta \downarrow 0$ の時，$(x_0 - \delta, x_0] \to \{x_0\}$ であるから，単調減少列に対する測度の連続性より，

$$\lim_{\delta\downarrow 0}(F(x_0) - F(x_0 - \delta)) = \mu(\{x_0\})$$

F の右連続性と合わせて，

$$\begin{aligned} F \text{ が } x_0 \text{で連続} \quad &\Leftrightarrow \lim_{\delta\downarrow 0}(F(x_0) - F(x_0 - \delta)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu(\{x_0\}) = 0 \end{aligned}$$

□