# 2018 解析 1 演習
# 第 6 回

2018 年 6 月 1 日

## 1　問題

1.$(X.\mathcal{M})$ を可測空間，$f$，$g$ を $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))-$ 可測とする．$f \wedge g, f \vee g$ が $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))-$ 可測であることを示せ．

2. $(X, \mathcal{M}_j), (Y, \mathcal{B}_l), (j = 1, 2)$ を可測空間とし，$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2, \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$とする．$f : X \to Y$ が $(\mathcal{M}_1, \mathcal{B}_2)-$ 可測であるならば $(\mathcal{M}_2, \mathcal{B}_1)-$ 可測であることを示せ．

3. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$を $X$ 上の $\mathbb{R}$ 値関数列とし，．各 $f_n$は $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))-$ 可測とする.また，
(1) $A_1 = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が $\mathbb{R}$ に存在する $\}$ は $\mathcal{M}-$ 可測集合であることを示せ．
(2) $A_2 = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}$ は $\mathcal{M}-$ 可測集合であることを示せ．
(3) $A = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が$\overline{\mathbb{R}}$に存在する $\}$ は $\mathcal{M}-$ 可測集合であることを示せ．($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ であることに注意せよ．)

4.$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ を数え上げ測度 $\mu$ の測度空間とする．
(1)任意の関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ は $2^{\mathbb{N}}-$ 可測であることを示せ．
(2)関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ が$\mu-$ 可積分であるとき,$\int_{\mathbb{N}} f(x)\mu(dx)$ はどのようなものか．必要ならば $a_k = f(k)$ と置いて考察せよ．
Recall:積分の定義
一般に非負 $\mathcal{M}-$ 可測関数 $f$ に対して，$\int_X f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$．ここで，関数列の条件として $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負単関数列で，$\forall x \in X$ に対し，$f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ かつ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ を満たしている．

# 2　解答

## 2.1

1.$(X.\mathcal{M})$ を可測空間，$f$，$g$ を $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) -$ 可測とする．$f \wedge g, f \vee g$ が $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) -$ 可測であることを示せ．

答．
$a \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\{x \in X \mid (f \wedge g)(x) > a\} = \{x \in X \mid f(x) > a\} \cap \{x \in X \mid g(x) > a\}$$

及び，

$$\{x \in X \mid (f \vee g)(x) > a\} = \{x \in X \mid f(x) > a\} \cup \{x \in X \mid g(x) > a\}$$

から,$f, g$ が $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) -$ 可測であるならば命題 4.1（可測関数の同値な条件）から，$f \wedge g, f \vee g$ もそうである．

## 2.2

2.$(X, \mathcal{M}_j), (Y, \mathcal{B}_l), (j = 1, 2)$ を可測空間とし，$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2, \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$とする．$f : X \to Y$ が $(\mathcal{M}_1, \mathcal{B}_2) -$ 可測であるならば $(\mathcal{M}_2, \mathcal{B}_1) -$ 可測であることを示せ．

解答．

*Proof.* 任意の $B \in \mathcal{B}_1$に対して，$B \in \mathcal{B}_2$であるので
$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_1 \quad \therefore f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_2$
これにより，$f$ は可測関数の定義を満たし，$(\mathcal{M}_2, \mathcal{B}_1) -$ 可測である．

□

(復習　定義 4.1 可測関数)
$(X, \mathcal{M})$，$(Y, \mathcal{B})$ を可測空間とする．（$\mathcal{M}, \mathcal{B}$ は$\sigma$加法族）
関数 $f$ が $(\mathcal{M}, \mathcal{B}) -$ 可測であるとは，任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して，$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ が成り立つことである．(つまり可測集合の逆像も可測集合となるような関数 $f$ である)

## 2.3

3.$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$を $X$ 上の $\mathbb{R}$ 値関数列とし，. 各 $f_n$は $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) -$ 可測とする.また，
(1) $A_1 = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が $\mathbb{R}$ に存在する $\}$ は $\mathcal{M} -$ 可測集合であることを示せ．
(2) $A_2 = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}$ は $\mathcal{M} -$ 可測集合であることを示せ．
(3) $A = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が$\overline{\mathbb{R}}$に存在する $\}$ は $\mathcal{M} -$ 可測集合であることを示せ．($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ である

ことに注意せよ.)

解答.

(1)

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が $\mathbb{R}$ に存在する $\Leftrightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ の Cauchy列

$$\Leftrightarrow \text{任意の } k\in\mathbb{N} \text{ に対し，ある } N_k\in\mathbb{N} \text{ が存在して，} |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}\ \ (n.m\geq N_k)$$

よって，$A_1=\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n,m\geq l}\{x\in X\mid |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}\}$

とかける.

$\{x\in X\mid |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}\}$ について，可測関数の差，絶対値は可測関数であり，これは $\mathcal{M}-$ 可測集合.

$\sigma$加法族の性質から，可測集合の高々可算個の和及び共通部分もまた可測集合なので $A_1$は $\mathcal{M}-$ 可測集合である.

(2)

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty \Leftrightarrow$ 任意の $k$ に対して，ある $N_k$が存在して，$f_n(k)\geq k\ \ (n\geq k)$

よって，$A_2=\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq l}^{\infty}\{x\in X\mid f_n(x)\geq k\}$

(1）と同様に　$\{x\in X\mid f_n(x)\geq k\}$ は $\mathcal{M}-$ 可測集合．なので $A_2$も可測集合.

(3)

$A_3=\{x\in X\mid \lim_{n\to\infty} f_n(x)=-\infty\}$ とおけば,

$A_3=\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq l}^{\infty}\{x\in X\mid f_n(x)\leq -k\}$

$A_1A_2$と同様にこれは $A_3$は $\mathcal{M}-$ 可測集合である.

$A=A_1\cup A_2\cup A_3$であり，可測集合の可算和は可測集合なので，$A\in\mathcal{M}$

## 2.4

4.$(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\mu)$ を数え上げ測度 $\mu$ の測度空間とする.

(1)任意の関数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ は $2^{\mathbb{N}}-$ 可測であることを示せ.

(2)関数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ が$\mu-$ 可積分であるとき, $\int_{\mathbb{N}} f(x)\mu(dx)$ はどのようなものか．必要ならば $a_k=f(k)$ と置いて考察せよ.

Recall:積分の定義

一般に非負 $\mathcal{M}-$ 可測関数 $f$ に対して，$\int_X f d\mu := \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$．ここで，関数列の条件として $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負単関数列で, $\forall x\in X$ に対し，$f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$ かつ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ を満たしている.

解答

(1)$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して, $f^{-1}(B)$ は $\mathbb{N}$ の部分集合より，$f^{-1}(B)\in 2^X$　$\therefore f$ は $2^X-$ 可測

(2) $\int_{\mathbb{N}} f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$である．

*Proof.* $f$ が非負値関数とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$f_n(m) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\{k\}}(m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

とおく．

$f_n : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ は単関数．また，各 $m \in \mathbb{N}$ について，　$f_n(m) \leq f_{n+1}(m)$ であり，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(m) = f(m)$$ （$f_n$の定義により，$m = k$（つまり $m \in \{k\}$）のときしか $f_n(m)$ は値を持たない．)

よって，$\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(\{k\})$

今，$\mu$は数え上げ測度より，$\mu(\{k\}) = 1$ なので

$$\int_{\mathbb{N}} f(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{N}} f d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

□