解析学 2　演習問題　第 10 回

問 1

(1)

　与えられた式の分母を払って

$$a(1+b)(1+c)+b(1+a)(1+c) \geq c(1+a)(1+b)$$

と同値である．これを展開して整理した

$$a+b-c+2ab+abc \geq 0$$

を示せばよい．$a, b, c \geq 0$ だから $2ab+abc \geq 0$ であり，また $a+b \geq c$ より $a+b-c \geq 0$ である．よって

$$a+b-c+2ab+abc \geq 0$$

が示された．

(2)

　三角不等式だけ示す．x, y, z が任意に与えられたとする．

$$d(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,z)}{1+d_n(x,z)}$$

である．ここで各 n に対し $a = d_n(x,y), b = d_n(y,z), c = d_n(x,z)$ とおくと仮定 (iii) から $a+b \geq c$ が成り立つ．そこで (1) の結果を適用して

$$\frac{d_n(x,z)}{1+d_n(x,z)} \leq \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} + \frac{d_n(y,z)}{1+d_n(y,z)}$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,z)}{1+d_n(x,z)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left\{ \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} + \frac{d_n(y,z)}{1+d_n(y,z)} \right\} \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

となる．

問 2

(1)

必要性．$n \in \mathbb{Z}_+$ と $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする．$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ は x に d について収束するので，

$$\exists K \in \mathbb{N}, \quad k \geq K \Rightarrow d(x_k, x) < \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

となる．すると $k \geq K$ のとき

$$\frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_k, x)}{1 + d_n(x_k, x)} \leq d(x_k, x) < \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

となり，整理すると

$$d_n(x_k, x) < \varepsilon$$

を得る．したがって，

$$\lim_{k \to \infty} d_n(x_k, x) = 0$$

である．十分性．$\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする．$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は収束するので，

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．$0 \leq n \leq N$ となる任意の n に対して，$\lim_{k \to \infty} d_n(x_k, x) = 0$ だから，

$$\exists N_n \in \mathbb{N}, \quad k \geq N_n \Rightarrow \frac{d_n(x_k, x)}{1 + d_n(x_k, x)} < \frac{\varepsilon}{4}$$

となる．そこで $\max_{0 \leq n \leq N} N_n = M$ とすると，$k \geq M$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_k, x)}{1 + d_n(x_k, x)} &< \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} \left(2 - \frac{1}{2^N} \right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

となる．以上により $k \geq M$ のとき

$$\begin{aligned}
d(x_k, x) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_k, x)}{1 + d_n(x_k, x)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_k, x)}{1 + d_n(x_k, x)} \\
&\leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_k, x)}{1 + d_n(x_k, x)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

となり，$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x) = 0$ である．

(2)

(1) とほぼ同様なので，省略する．

問 3

(1)

$\{B(f,\rho)\}_{\rho>0}$ が f の基本近傍系をなすことは明らか．そこで

$$\forall\rho>0,\quad \exists n\in\mathbb{N},\quad \exists r>0,\quad U(f,n,r)\subset B(f,\rho)$$

を示す．これが示されれば，任意の f の開近傍に対し $B(f,\rho)$ が含まれるように ρ を取ると，さらに $B(f,\rho)$ に $U(f,n,r)$ が含まれるように出来るので，基本近傍系であることの証明が終わる．$\rho>0$ が任意に与えられたとする．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty$ より，

$$\exists N\in\mathbb{N},\quad \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{\rho}{2}$$

となる．$\gamma=\min\{2,\rho\}$ とし,$r=\frac{\gamma}{4-\gamma}$ とする．$r>0$ であり，任意の $n\in\mathbb{Z}_+$ に対して $d_n(f,g)=p_n(f-g)<r$ のとき

$$\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}<\frac{\gamma}{4}\le\frac{\rho}{4}$$

が成り立つ．そこで $p_N(f,g)<r$ とすると

$$0\le\forall n\le N,\quad p_n(f,g)\le p_N(f,g)<r$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}&<\frac{\rho}{4}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\\&\le\frac{\rho}{4}\left(2-\frac{1}{2^N}\right)\\&<\frac{\rho}{2}\end{aligned}$$

となる．以上により，任意の $g\in U(f,N,r)$ に対して

$$\begin{aligned}d(f,g)&=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}\\&\le\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\\&<\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2}\\&=\rho\end{aligned}$$

となるから，$g\in B(f,\rho)$ であり，$U(f,N,r)\subset B(f,\rho)$ である．これで証明が終わった．

(2)

(ii)⇔(iii) のみ示す．(ii)⇒(iii)．$\{U(0,n,r)\}_{n\in\mathbb{Z}_+, r>0}$ が基本近傍系をなすことから，

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists m\in\mathbb{Z}_+,\quad \exists r>0,\quad g\in U(0,m,r)\Rightarrow|\Phi(g)|<\varepsilon$$

となる．$C=\frac{2\varepsilon}{r}$ とすると $C>0$ である．$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が任意に与えられたとする．$|\Phi(f)|\leq Cp_m(f)$ を示す．$f=0$ の時は明らかだから，$f\neq 0$ とする．$g=\frac{f}{p_m(f)}\frac{r}{2}$ とすると $p_m(g)<r$ より $g\in U(0,m,r)$ であり，従って

$$|\Phi(g)|=\frac{r}{2p_m(f)}|\Phi(f)|<\varepsilon$$

となる．整理して $|\Phi(f)|\leq Cp_m(f)$ を得る．(iii)⇒(ii)．

$$\exists m\in\mathbb{Z}_+,\quad \exists C>0,\quad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),\quad |\Phi(f)|\leq Cp_m(f)$$

とする．$\varepsilon>0$ が任意に与えられたとする．$r=\frac{\varepsilon}{C}$ とすると $r>0$ であり，

$$f\in U(0,m,r)\Rightarrow|\Phi(f)|\leq Cp_m(f)<C\times\frac{\varepsilon}{C}=\varepsilon$$

が成り立つから，(ii) が示された．

(3)

(多分) 前問と同様なので省略する．