1　準備

この節では，講義中に用いる基本的な用語の定義や定理を紹介する．主として講義後半のための準備である．準備と言いながら関数解析を知っている人向けに書いているので，1 回生は読み飛ばして 2 節から読むべきである．

Definition 1.1. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を既知の関数として，

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), t)$$

を満たす未知関数 $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を求めろという方程式を一階の常微分方程式という．両辺はベクトルに値を取るので，微分は成分毎に考える．特に右辺の f が t に依存しない時自励系と言い，依存する時非自励系という．

Definition 1.2. A を集合とする．$d(\cdot, \cdot) : A \times A \to [0, \infty)$ が距離であるとは，次を満たすことを言う．

1. $d(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x, y \in A, \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in A, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

A と距離 d の組 (A, d) を距離空間という．

Definition 1.3. (A, d) を距離空間とする．(A, d) の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in A$ に収束するとは，

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad d(x_n, x) < \varepsilon$$

が成り立つことを言う．また，(A, d) の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq N, \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

が成り立つことを言う．(A, d) の任意のコーシー列が収束する時，(A, d) を完備距離空間という．

Definition 1.4. X を複素数係数の線形空間とする．$\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ がノルムであるとは，次が成立することである．

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x, y \in X, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\forall x \in X, \quad \forall c \in \mathbb{C}, \quad \|cx\| \leq |c|\|x\|$

複素数係数線形空間 X とそのノルム $\|\cdot\|$ の組 $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間という．特に X が実数係数なら実ノルム空間という．

Remark 1. $d(x, y) = \|x - y\|$ とすることで X に距離が入る (確かめよ)．ノルムは X の線形構造と整合性のとれた距離を誘導する．より一般に，線形構造と整合性のとれた位相の入った線形空間を位相線形空間という[*1]．

[*1] 正確な定義は例えば宮島静雄 [1] を参照．

Definition 1.5. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ は $d(x,y) = \|x-y\|$ で定めた距離が完備であるとき，完備ノルム空間という．完備ノルム空間を *Banach* 空間という．

Definition 1.6. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ を *Banach* 空間とし，$T : X \to Y$ を線形写像とする．このとき T を線形作用素と呼ぶ．

$$\|T\| \coloneqq \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

として $\|T\|$ を定める．$\|T\| < \infty$ となる T の全体を有界線形作用素と言い，$L(X,Y)$ と書く．$(L(X,Y), \|\cdot\|)$ は *Banach* 空間になる．

Remark 2. $T : X \to Y$ が有界線形であることと線形連続であることは同値である．また，$(L(X,Y), \|\cdot\|)$ が完備であることの証明には X が完備であることは使わない (従って上の定義で X はノルム空間としてよい)．

Definition 1.7. $(X, \|\cdot\|)$ を *Banach* 空間とする．$f : X \to \mathbb{C}$ が線形かつ連続写像であるとき，f を X 上の線形汎関数という．X 上の線形汎関数全体の空間を X^* と書き，X の双対空間という．もちろん $\mathbb{C}$ も *Banach* 空間だから，$X^* = L(X, \mathbb{C})$ であり，上で定めたノルム $\|\cdot\|$ によって X^* は *Banach* 空間になる．従って X^* の双対空間も考えることができ，それを X^{**} と書いて第二双対空間と言う．

Definition 1.8. X を *Banach* 空間とし，$x \in X$ とする．$f \in X^*$ に対して

$$Jx(f) \coloneqq f(x) \in \mathbb{C}$$

として $Jx : X^* \to \mathbb{C}$ を定めると，$Jx \in X^{**}$ である．x に対して Jx を定める対応を自然な埋め込みと言い，これが全射になるとき X は反射的であるという．

Remark 3. 有限次元ならすべての自然な埋め込みは全射になり，圏論でいう自然変換の例になる．無限次元だと必ずしも全射にはならない．もっというと自然な埋め込みが全射でなくても別の写像によって第二双対 X^{**} と同型になる例が知られている．要するに良い写像で第二双対との同型が取れるというのが反射的 Banach 空間である．

Definition 1.9. X を *Banach* 空間とする．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が $x \in X$ に弱収束するとは，

$$\forall f \in X^*, \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

が成立することを言う．

Remark 4. (点列の収束で位相が入るわけではないので不正確な言い方だが) この収束によって X に入る位相はノルムによる位相より一般に弱い．すなわち，x_n が x にノルム収束するなら弱収束する．この位相を弱位相と呼ぶ．コンパクト集合 (あるいは点列コンパクト集合) が増えるので，解析にとっては大変便利な位相である．

Remark 5. 弱収束極限の一意性 (あるいは弱位相のハウスドルフ性) を示すには Hahn-Banach の拡張定理と言われる定理を用いる．ただしこの定理は Zorn の補題を用いて示されるので，選択公理を用いていることになる．

Theorem 1.10. *X を反射的 Banach 空間とする．この時，X の (ノルム位相での) 任意の有界列は弱収束する部分列を持つ．*

Remark 6. X が有限次元ならばより強くノルム収束する部分列を含むことが言える．無限次元ではそうではない．

Definition 1.11. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が領域であるとは，Ω が連結開集合であることを言う．

Remark 7. 以下特に断らない限り，Ω と書いたら $\mathbb{R}^n$ の領域であるとする．連結性は要らない場合も多い．

Definition 1.12.

$$L^p(\Omega) \coloneqq \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$$

とし，

$$\| \cdot \|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$$

を

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \coloneqq \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

で定める．

Remark 8. $(L^p(\Omega), \| \cdot \|)$ は完備ノルム空間になる (本当は殆どいたるところ等しい関数を同一視しなければならない)．その証明はどの関数解析の教科書にも書いてあり，そこそこ面倒だから省略する．

Definition 1.13. Ω に含まれる任意のコンパクト集合上で可積分な関数全体を $L^1_{loc}(\Omega)$ とかく．

Definition 1.14. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ を多重指数と言い，その指数 $|\alpha|$ を $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ で定める. 多重指数 α と滑らかな関数 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

と定義する．

Remark 9. ϕ が滑らかでなくても，$C^{|\alpha|}$ 級で十分であることは明らかだろう．多重指数は多変数関数の取り扱いの時に非常に便利であり，ライプニッツ則なども成り立つが，その証明はしない．

Definition 1.15. $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ が $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ の α 階の弱導関数であるとは，

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega u \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v D^\alpha \phi dx$$

が成立することを言う．この時，通常の導関数と同じ記号で $v = D^\alpha u$ と書く．

Remark 10. 弱導関数 $D^\alpha u$ の一意性を示すのには変分法の基本補題が必要である．解析力学で登場するものよりさらに一般的な形の物なので，興味のある人は関数解析の本を参照するとよいかもしれない．

Definition 1.16. $k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$ に対して，

$$W^{k,p}(\Omega) \coloneqq \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

と定義する．$u \in W^{k,p}(\Omega)$ に対し，$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^2_{L^p(\Omega)}}$ と定義するとこれはノルムになり，$(W^{k,p}(\Omega), \| \cdot \|_{W^{k,p}(\Omega)})$ は完備ノルム空間になる．

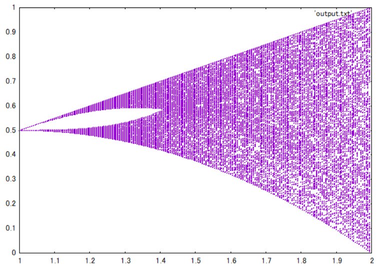

図 1　分岐図

2　数値計算で見る

人間の計算能力というのには限りがあって，例えば行列の計算でもサイズが 4 を超えると嫌気がさしてくる．微分方程式の (近似) 解法やもっと単純に写像の反復があったとして，人間の計算能力の欠如のために現実に実行可能でない場合はままある．こういう場合，PC にやらせてしまうのが良い．

Example 2.1. カオス[*2]の例は単純な操作の反復でも観察できる．$\mu > 0$ をパラメーターとして

$$f(x) = \begin{cases} \mu x & (x < 0.5) \\ \mu(1-x) & (x \geq 0.5) \end{cases}$$

という写像をテント写像という．何回も反復合成する，すなわち

$$f(f(f(f(f(\ldots f((x)))))))$$

として計算すると複雑な挙動を示すことが知られている．初期値を $x = 0.5$ とし，μ を $[1, 2)$ の間で $\frac{1}{200}$ 刻みに動かし，反復を 200 回行ったものが図 1 である．横軸がパラメータ μ で，縦軸が反復したときの値である．このような図を分岐図と言う．

Example 2.2. 区間 $[-2, 2]$ の上に 2000 個の点を等間隔で置き，$(-0.5, 0)$ と $(0.5, 0)$ にプロペラを置く．$(-0.5, 0)$ に置いたプロペラを反時計周りに一定時間だけ回して止め，$(0.5, 0)$ に置いたプロペラを時計回りに一定時間回して止める．この一連の操作を僅か 16 回繰り返して出来上がったのが図 1 である．元が一直線上にあったとは思えない複雑な混合が実現されている．この計算の詳細やそれに関連した話題については，坂上貴之 *[2]* を参照のこと．

2 回生では講義で微分方程式を習う．何故か初等解法にかなりの時間を割く[*3]ので常微分方程式は解けるものと思いがちだが，実際は解けない事の方が多い．さらに，解けたとしても複雑な冪級数表示になって具体的にどういう解なのか分かり辛かったりする．そのような場合，数値計算してみるのは大変有力な手段である．

Example 2.3. 常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{dx}{dt}(t) + 6x(t) + 3x(t)^2 = 0$$

[*2] これは話の通りを良くするための客寄せパンダ的な物言いであることに注意願いたい．

[*3] 個人的にはこのような自分で何ら支障なく勉強できることではなく，解の一意存在定理や大域理論に時間を割くべきだと思うが．

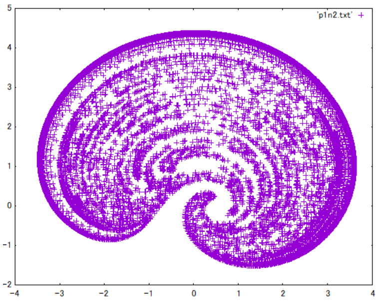

図 2　攪拌の図

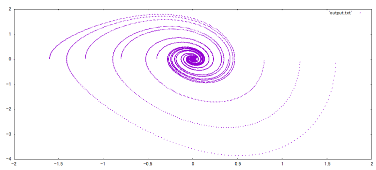

図 3　初期位置が原点の周り

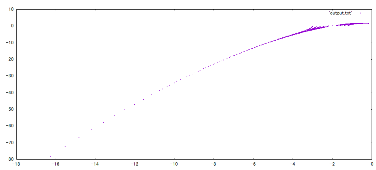

図 4　初期位置が (-2,0) の周り

を考える．$y(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ と置くと，

$$\frac{dx}{dt}(t) = y(t)$$
$$\frac{dy}{dt}(t) = -y(t) - 6x(t) - 3x(t)^2$$

という 1 階の常微分方程式になる．$(x(t), y(t))$ をまとめて相空間という．適当に初期値を変えながら数値計算し，相空間に解の軌跡を描いたのが図 3 と図 4 である．原点の周りでは巻き付くように動く一方で，$(-2, 0)$ の左側ともなると急速に (-2.0) から遠ざかるのが分かる． このように，初期位置によって大幅に解の挙動が変わる (ある 1 点に近づくか，あるいは遠く無限大に飛んでいくか)．ところで力学系の理論*4の初歩を用いるとこれぐらいの挙動は実は数値的に方程式を解かずともわかってしまう．興味を持った人は先輩方に尋ねてみるとよいだろう．

Example 2.4. もう少し複雑な挙動をする方程式を紹介する．$\mu > 0$ をパラメータとして

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \mu(x(t)^2 - 1)\frac{dx}{dt}(t) + x(t) = 0$$

*4 名前に反して (？) 数学の分野である．

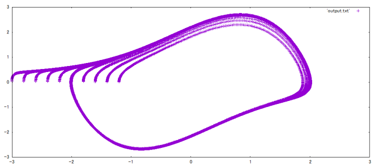

図 5　van der Pol

を *van der Pol* の方程式という．これも先と同様に

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= y(t)\\ \frac{dy}{dt}(t) &= -x(t) + \mu(1 - x(t)^2)y(t)\end{aligned}$$

として一階に直し，適当に数値計算したのが図 5 である．どこから始まってもある閉曲線に巻き付いていくようにに見えることがわかる．この閉曲線のことを極限周期軌道[*5]という．このような軌道に関する定理としてポアンカレ—ベンディクソンの定理が知られている．

参考文献

[1] 宮島静雄，『関数解析』，横浜図書，2005

[2] 坂上貴之，『渦運動の数理的諸相』，共立出版，2013

[3] 笠原晧司，『微分方程式の基礎』，朝倉書店，初版 1982

[*5] 正確な定義は例えば笠原 [3] を参照.