Perturbation Theory For Linear Operators

1　行列の摂動

この節では，有限次元の場合の作用素の摂動，特に行列の摂動を調べる．行列の固有値や固有空間への射影，レゾルベントが，行列に対して加えた摂動に対してどうふるまうかを見る．

1.1　固有値の摂動

1.1.1　準備

複素成分の $n \times n$ 行列全体を $M_n(\mathbb{C})$ と書くことにする．$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，A の固有値全体の集合を $\sigma(A)$ と書く．ここでは，行列に対する摂動は次の形のものに限定する．

Definition 1.1. $T, T_1, \ldots, T_j \in M_n(\mathbb{C})$ が与えられているとする．各 $x \in \mathbb{C}$ に対して

$$T(x) \coloneqq T + xT_1 + \ldots + x^j T_j$$

で定まる $T(x)$ を行列 T の摂動と言い，x を摂動のパラメータと言う．

Remark 1. $T(0) = T$ および $T(x)$ の各成分は x の多項式であることに注意する．また，$T_1 = \ldots = T_m = 0$ の場合は考えても何の意味もないので，考えないことにする．

既約多項式の零点に関して，次が知られている．これは後に用いる．

Fact 1.2 (Puiseux series)**.** $P(\zeta, x)$ を次のように書ける二変数の複素数係数の既約多項式とする．

$$P(\zeta, x) = \zeta^n + a_1(x)\zeta^{n-1} + \ldots + a_n(x)$$

ただし，$P(\zeta, x)$ は x について *1* 次以上であるとする．$x = x_0$ において $P(\zeta, x_0)$ は ζ について $m \geq 1$ 重根 ζ_0 を持つと仮定する．便宜的に $m = 1$ の場合も重根に含めている．この時，ある $r > 0$ と，x_0 中心の円盤 $B(x_0, r) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x_0| < r\}$ 上収束するべき級数

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - x_0)^k$$

で $c_0 = \zeta_0$ となるものが存在して，

$$\forall z \in B(x_0, r), \quad P(\phi(z), (z - x_0)^m + x_0) = 0$$

を満たす．

Remark 2. 上の主張をまとめると，二変数多項式を一方の文字について解いた結果は一般に多価関数になり，重根を取るようなパラメーター x_0 はその代数的特異点と呼ばれるものになる．$r > 0$ は重根を取るような x_0 以外のパラメーターを円盤に含まないように取ればよい．級数に負のべきが現れないのは最高次の係数が 1 になるように取っているためである．証明は，例えば Forster の Lectures on Riemann Surfaces や，Ahlfors の複素解析などを参照のこと．加藤敏夫の Perturbation Theory for Linear Operators によれば，係数が x の正則関数の場合 (このような関数を代数型関数という) でも同じ主張が成立するようである．その場合の証明は Baumgärtel の Endlichdimensionale analytische Störungstheorie に記載されているそうだが，ドイツ語なので読めない．どなたか証明の内容を知っていたら教えていただけると非常にうれしい．

1.1.2 本題

$T \in M_n(\mathbb{C})$ とし，$T_1, \ldots, T_j \in M_n(\mathbb{C})$ に対し摂動は

$$T(x) = T + xT_1 + \ldots + x^j T_j$$

で与えられているとする．T の固有値は，重複を許せば n 個存在するので，それらを

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_n$$

と書くことにする．$T(x)$ の固有値全体は

$$\sigma(T(x)) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \det(\zeta I - T(x)) = 0\}.$$

となる．$P(\zeta, x) \coloneqq \det(\zeta I - T(x))$ は $T(x)$ の定義と行列式の定義から ζ, x についての二変数多項式であり，$a_1(x), \ldots, a_n(x)$ を x についての多項式として，次のように書ける．

$$P(\zeta, x) = \zeta^n + a_1(x)\zeta^{n-1} + \ldots + a_n(x)$$

従って ζ については重複を許して n 個の根を持つ．それらを

$$\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x),$$

と書くことにする．$T(0) = T$ であるから, 適当に並べ替えることで,

$$\lambda_i(0) = \sigma_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

としてよい．これらの固有値がどのように x に依存するのかを考えたい．例を通してその一端を見る．以下の例では，$n = 2, j = 1$ としている．

Example 1.3.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

として，摂動を

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -1 \end{pmatrix}$$

で与える．$T(x)$ の固有値は固有方程式

$$\det(\zeta I - T(x)) = \zeta^2 - 1 - x^2 = 0$$

を ζ について解いて得られ，

$$\lambda_{\pm}(x) = \pm(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

という x についての多価関数を得る. 実際，$+i$ を中心とする円 $x(t) = i + \mathrm{e}^{it}(0 \leq \pi \leq 2\pi)$ を考える．すると $x(0) = x(2\pi)$ であるが，$\lambda_+(x(2\pi)) = -\lambda_+(x(0)) = \lambda_-(x(0))$ となり，λ_+ は $x(0)$ から始めて $+i$ の周りを一周すると値が変わってしまう．$-i$ においても同様である．$x = \pm i$ において $\det(\zeta I - T(x)) = \zeta^2 - 1 - x^2 = 0$ が ζ について重根を持つことに注意する．

Example 1.4.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として摂動を

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める．$T(x)$ の固有値は固有方程式

$$\det(\zeta I - T(x)) = \zeta^2 = 0$$

を ζ について解いて得られ，

$$\lambda(x) = 0$$

となる．この場合は，$\det(\zeta I - T(x)) = \zeta^2 = 0$ は摂動のパラメータによらずに重根を持つことに注意する．

Example 1.5.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として摂動を

$$T(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める．$T(x)$ の固有値は固有方程式

$$\det(\zeta I - T(x)) = \zeta(\zeta - x) = 0$$

を ζ について解いて得られ，

$$\lambda_1(x) = 0, \lambda_2(x) = x$$

となる．$x = 0$ で $P(\zeta, x)$ は重根を持つが，固有値は多価関数ではない．$P(\zeta, x)$ は既約ではないことに注意する．この例はかなり面倒な事態が起こることを述べているのであるが，それは後述する．

Example 1.3 のように，一般に $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ は x の多価関数になる. 重根を持つような摂動のパラメータ x はその代数的特異点と呼ばれる点になる．このことを示したいのだが，Example 1.4 のように行列を摂動させても固有多項式は何ら変化しないような例が存在する．このような場合は固有値の摂動を考える上では意味がないので，除いて考える．

Remark 3. 以下，$P(\zeta, x)$ は x について 1 次以上の多項式とする．

次の定理がこの節の目標である．

Theorem 1.6. 上で定めた $P(\zeta, x)$ は二変数多項式として既約であり，$x = x_0$ において $P(\zeta, x_0)$ は $m \geq 1$ 重根 ζ_0 を持つと仮定する．この時，ある x_0 を含む単連結領域 D_0 と，D_0 上収束する m 個のべき級数

$$\psi_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k}(x - x_0)^{\frac{k}{m}}, \quad i = 1, \ldots, m$$

が存在して，$i = 1, \ldots, m$ に対して次を満たす．

1. $a_{i,0} = \zeta_0$
2. $\forall x \in D_0, \quad P(\psi_i(x), x) = 0$

Proof. $P(\zeta, x)$ に Fact 1.2 を適用して，ある $r > 0$ と，x_0 中心の円盤 $B(x_0, r) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x_0| < r\}$ 上収束するべき級数

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - x_0)^k$$

で $c_0 = \zeta_0$ となるものが存在して，

$$\forall z \in B(x_0, r), \quad P(\phi(z), (z - x_0)^m + x_0) = 0$$

を満たす．$B(x_0, r^m)$ から $x_0 - r^m t, \quad t \in [0, 1]$ で表される線分を取り除いたものを D_0 とすると，D_0 は単連結領域である．$x \in D_0$ が任意に与えられたとする．1 の m 乗根を $\omega_1, \ldots, \omega_m$ とし，$i = 1, \ldots, m$ に対して $z_i : D_0 \to B(x_0, r)$ を

$$z_i(x) = \omega_i (x - x_0)^{\frac{1}{m}} + x_0$$

として定義する．D_0 が単連結だから，z_i は全て D_0 上の正則関数である．$\lambda_i : D_0 \to \mathbb{C}$ を

$$\psi_i(x) = \phi(z_i(x))$$

として定義する．$z_i(x) \in B(x_0, r)$ だから，$\phi(z)$ が $z \in B(x_0, r)$ で収束することから，右辺は収束する．右辺を計算すると

$$\begin{aligned}
\psi_i(x) &= \phi(z_i(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z_i(x) - x_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_i^k (x - x_0)^{\frac{k}{m}}
\end{aligned}$$

となり，$a_{i,k} = c_k \omega_i^k$ と置けば，

$$\psi_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k}(x - x_0)^{\frac{k}{m}}$$

が得られる．条件 1 および 2 を満たすことを確かめる．$c_0 = \zeta_0$ だから，

$$a_{i,0} = c_0 \omega_i^0 = c_0 = \zeta_0$$

である．また，$z_i(x)$ の式から $x = (z_i(x) - x_0)^m - x_0$ であり，したがって

$$\begin{aligned} P(\psi_i(x), x) &= P(\phi(z_i(x)), x) \\ &= P(\phi(z_i(x)), (z_i(x) - x_0)^m - x_0) \end{aligned}$$

となるが，$z_i(x) \in B(x_0, r)$ であること及び $z \in B(x_0, r)$ に対して $P(\phi(z), (z - x_0)^m + x_0) = 0$ であることから，

$$P(\phi(z_i(x)), (z_i(x) - x_0)^m - x_0) = 0$$

を得る．以上より

$$P(\psi_i(x), x) = 0$$

となり，条件 1 と 2 を満たすことが示された． □

したがって，次が従う．

Corollary 1.7. $P(\zeta, x)$ が既約であると仮定する．この時，任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して，σ_i の重複度を m とすると，ある 0 を含む単連結領域 D_0 が存在して，$\lambda_i(x)$ は D_0 上で

$$\lambda_i(x) = \sigma_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} x^{\frac{k}{m}}$$

という収束べき級数で表示される．

Proof. $i \in \{1, \dots, n\}$ が任意に与えられたとする．$x_0 = 0, \zeta_0 = \sigma_i$ として Theorem 1.6 を適用すると，0 を含む単連結領域 D_0 と，D_0 上収束する m 個のべき級数

$$\psi_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} (x - x_0)^{\frac{k}{m}}, \quad i = 1, \dots, m$$

が存在して，$i = 1, \dots, m$ に対して次を満たす．

1. $a_{i,0} = \sigma_i$
2. $\forall x \in D_0, \quad P(\psi_i(x), x) = 0$

すると，$\lambda_i(0) = \sigma_i$ であること及び $\lambda_i(x)$ の定義から，

$$\exists h \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall x \in D_0, \quad \lambda_i(x) = \psi_h(x)$$

となる．したがって，示された． □

Remark 4. 既約でないようなときも，$P(\zeta, x) = P_1(\zeta, x) \dots P_n(\zeta, x)$ として既約な多項式に分解して Corollary 1.7 を適用すればよいが，初めから既約な場合に限定して述べたのは，次のような事に注意する必要があるからである．Example 1.5 では，$x = 0$ において重複度 $m = 2$ の固有値 0 を持つが，$\lambda_1(x) = 0, \lambda_2(x) = x$ だから，Corollary 1.7 のような表示は出来ない．この場合，$P(\zeta, x)$ を分解すると $\zeta(\zeta - x)$ となり，$P_i(\zeta, x)$ の中に x に依存しないものが含まれてしまうためである．

以上の議論をまとめたものが次の定理である．

Theorem 1.8. 任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し次のいずれかが成立する．

1. $\lambda_i(x) = \sigma_i$
2. ある 0 を含む単連結領域 D_0 が存在して，$\lambda_i(x)$ は D_0 上で

$$\lambda_i(x) = \sigma_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} x^{\frac{k}{m}}$$

   という収束べき級数で表示される．

Proof. $i \in \{1, \dots, n\}$ が任意に与えられたとする．$P(\zeta, x)$ を

$$P(\zeta, x) = P_1(\zeta, x) \dots P_l(\zeta, x)$$

と分解する．ただし，$P_k(\zeta, x), k = 1, \dots, l$ は既約二変数多項式である．$P(\lambda_i(x), x) = 0$ だから，ある $k \in \{1, \dots, l\}$ が存在して $P_k(\lambda_i(x), x) = 0$ となる．$P_k(\zeta, x)$ が x に依存しないときは 1 の場合に相当し，x について 1 次以上の時は Corollary 1.7 を用いて 2 の場合に相当することが従う． □

Remark 5. いずれにせよ固有値の摂動のオーダーは，x が 0 に近いときは m を自然数として $x^{\frac{1}{m}}$ 程度と見積もることができ，x の一次より大きいオーダーにはならない．これがこの節の結論である．

1.2 レゾルベントの摂動

1.2.1 準備

レゾルベントについて基本的なことをここに記しておく．関数解析で学習する内容と同じであるから，知っている人は読み飛ばしても支障はない．

Definition 1.9. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$R : \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \to M_n(\mathbb{C})$ を

$$R(\zeta) \coloneqq (\zeta I - A)^{-1}$$

として定義する．R を A のレゾルベントと言う．$\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ を $\rho(T)$ と書く．

Remark 6. A のレゾルベントであることを明示したい時，$R(\zeta, A)$ と書くこともある．A の摂動 $A(x)$ が与えられたとき，$R(\zeta, A(x))$ を単に $R(\zeta, x)$ と書く．

Definition 1.10. $M_n(\mathbb{C})$ のノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ を，与えられた $\mathbb{C}^n$ のノルム $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n}$ に対して

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})^n} \coloneqq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{C}^n}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}}$$

として定める．

Remark 7. 混同の恐れが無いとき，$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ を単に $\|\cdot\|$ とかく．こうしてノルムが入ることにより，級数や関数の収束を実数などと同様に扱うことが出来る．特に，このノルムは完備である．

Theorem 1.11. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$\|A\| < 1$ の時，$I - A$ は正則であり，

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

と書ける．ただし，収束は $\|\cdot\|$ の意味である．

Proof.

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

となり，級数は絶対収束する．$\|\cdot\|$ は完備だから $\sum_{n=0}^{\infty} A^n \in M_n(\mathbb{C})$ が存在する．それを S と置く．$S = (I-A)^{-1}$ であることはすぐに分かる．

□

Theorem 1.12 (Neumann Series)**.** $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$|\zeta| > \|A\|$ の時，$\zeta \in \rho(T)$ であり，

$$R(\zeta) = (\zeta I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} A^n$$

と書ける．

2 線形作用素の摂動

この節では，無限次元における線形作用素の摂動を調べる．以下を通じて特に指定のない限り X, Y, Z は Banach 空間であり，作用素は線形であると約束する．

2.1 閉作用素の摂動

閉作用素に有界線形作用素を加えても閉作用素であることは良く知られている．その結果を非有界作用素に拡張することを考えたいが，当然一般には成立しないから，ある意味で「小さい」摂動に対して成立することを示す．

2.1.1 Preliminary

始めに閉作用素の定義や性質について述べる．定理の証明は省略する．どの本にも載っていることだと思うので，必要なら適切な関数解析の本を参照してほしい．

Definition 2.1. $T : X \to Y$ が閉 *(closed)* 作用素であるとは，

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T), \quad u_n \to u \in X, \quad Tu_n \to v \in Y$$

$\Longrightarrow$

$$u \in D(T), \quad Tu = v$$

が成り立つことを言う．

Theorem 2.2. $T : X \to Y$ が閉作用素であることは，$D(T)$ がノルム $\|\cdot\|_X + \|T\cdot\|_Y$ で *Banach* 空間であることと同値．

Definition 2.3. $T : X \to Y$ が可閉 *(closable)* 作用素であるとは，

$$\exists \tilde{T} : X \to Y : closed, \quad T \subset \tilde{T}$$

が成り立つことを言う．このような $\tilde{T}$ を T の閉拡大と呼ぶ．T の最小の閉拡大を $\bar{T}$ と書く．

Theorem 2.4. $T : X \to Y$ が *closable* であるとする．この時，

$$u \in D(\bar{T}) \Leftrightarrow \exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T), \quad u_n \to u, \quad Tu_n \to \bar{T}u$$

Remark 8. 通常この定理はグラフを定義して証明する．グラフの定義はここではしないが，次節辺りでするかもしれない．グラフを用いるとこの定理は $\bar{T}$ のグラフが T のグラフの閉包であると主張しているに過ぎない．

Theorem 2.5. $T : X \to Y$ が可閉であることは，

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T), \quad u_n \to 0, \quad Tu_n \to v \in Y$$

$\Longrightarrow$

$$v = 0$$

が成立することと同値．

2.1.2 閉作用素の安定性

閉作用素にどのような作用素を加えても閉のままであるかを調べる．$C(X, Y)$ で X から Y への閉作用素全体を表すことにする．

Definition 2.6. $T : X \to Y$ とする．$D(T) \subset D(A)$ を満たす作用素 $A : X \to Z$ が *T-bounded* であるとは，

$$\exists a, b \geq 0, \quad \forall u \in D(T), \quad \|Au\|_Z \leq a\|u\|_X + b\|Tu\|_Y$$

が成り立つことを言う．特にこのような b の下限，すなわち

$$\inf\{b \geq 0 \mid \exists a \geq 0, \quad \forall u \in D(T), \quad \|Au\|_Z \leq a\|u\|_X + b\|Tu\|_Y\}$$

を A の *T-bound* と言う．

Remark 9. 有界作用素の場合は $b = 0$ として成立するので T-bound は 0 である．後の例でみるが，一般には b を 0 に近づけると a が無限大になるので，T-bound の定義で inf を min として扱うことは難しい．T が閉のとき，A の T-bound がある程度小さければ $T + A$ は閉であるというのが次の定理である．

Theorem 2.7. $T, A : X \to Y, D(T) \subset D(A)$ とする．A は *T-bounded* であり，*T-bound* が 1 より真に小さいと仮定する．この時，

$$S := T + A : closable \quad \Leftrightarrow \quad T : closable$$

が成り立ち，さらに T, S のいずれかが *closable* ならば *(*もう一方も *closable* であり*)*

$$D(\bar{T}) = D(\bar{S})$$

が成り立つ．

Proof.

$$S \coloneqq T + A : \text{closable} \quad \Rightarrow \quad T : \text{closable}$$

を示す．$D(T) = D(S)$ であることに注意する．

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T), \quad u_n \to 0, \quad Tu_n \to v$$

とし，$v = 0$ であることを示せば良い．A の T-bound が 1 より小さいので，

$$0 \leq \exists b < 1, \quad \exists a \geq 0, \quad \forall u \in D(T), \quad \|Au\|_Y = a\|u\|_X + b\|Tu\|_Y$$

となる．従って，$u \in D(T)$ に対して

$$\begin{aligned} \|Tu\|_Y &\leq \|Su - Au\|_Y \\ &\leq \|Su\|_Y + \|Au\|_Y \\ &\leq \|Su\|_Y + a\|u\|_X + b\|Tu\|_Y \end{aligned}$$

となるから，$1 - b > 0$ より

$$\|Tu\|_Y \leq (1-b)^{-1}\|Su\|_Y + a(1-b)^{-1}\|u\|_X \tag{1}$$

が成立する．また，

$$\begin{aligned} \|Su\|_Y &= \|Tu - Au\|_Y \\ &\leq \|Tu\|_Y + a\|u\|_X + b\|Tu\|_Y \\ &\leq (1+b)\|Tu\|_Y + a\|u\|_X \end{aligned} \tag{2}$$

も成立する．従って $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|Su_n - Su_m\|_Y \leq (1+b)\|Tu_n - Tu_m\|_Y + \|u_n - u_m\|_X$$

が成立する．$\{u_n\}, \{Tu_n\}$ は共に収束列だから Cauchy 列である．したがって上の不等式から $\{Su_n\}$ も Cauchy 列であり，S は closable と仮定したから $Su_n \to 0$ となる．不等式 (1) で $u = u_n$ として，

$$\|Tu_n\|_Y \leq (1-b)^{-1}\|Su_n\|_Y + a(1-b)^{-1}\|u_n\|_X$$

を得る．ここで $n \to \infty$ とすると $Tu_n \to 0$ が得られる．したがって $v = 0$ である．

$$S \coloneqq T + A : \text{closable} \quad \Leftarrow \quad T : \text{closable}$$

を示す．

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(S), \quad u_n \to 0, \quad Su_n \to v$$

とし，$v=0$ であることを示せば良い．不等式 (1) から $\{Tu_n\}$ が Cauchy 列であることが分かり，仮定から $Tu_n \to 0$ となる．不等式 (2) から $v=0$ であることが従う．よって示された．最後に，S,T の一方が closable と仮定して $D(\bar{T})=D(\bar{S})$ を示す．今示したことからもう一方も closable である．$D(\bar{S}) \subset D(\bar{T})$ を示そう．$u \in D(\bar{S})$ が任意に与えられたとする．Theorem 2.4 から，

$$\exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(S), \quad u_n \to u, \quad Su_n \to \bar{S}u$$

となる．すると $\{u_n\},\{Su_n\}$ は共に Cauchy 列だから (1) より $\{Tu_n\}$ も Cauchy 列となり，

$$u_n \to u, \quad Tu_n = \bar{T}u_n \to \exists v \in Y$$

が成立する．したがって，$u \in D(\bar{T})$ かつ $\bar{T}u = v$ となり，示された．$D(\bar{T}) \subset D(\bar{S})$ も (2) を用いて同様に示すことが出来る． □

Remark 10. この定理の結論は，仮定は S,T について対称的ではないが，結論は対称的である．仮定を S,T について対称にすることで，結論が対称であることを明確にしたのが次の定理である．

Theorem 2.8. $S,T : X \to Y, D(T)=D(S)$ とする．

$$\begin{gathered}\exists a \geq 0, \quad 0 \leq \exists b_1 < 1, \quad 0 \leq \exists b_2 < 1, \quad \forall u \in D(T), \\ \|Su - Tu\|_Y \leq a\|u\|_X + b_1\|Tu\|_Y + b_2\|Su\|_Y\end{gathered}$$

が成立するならば，

$$S : closable \quad \Leftrightarrow \quad T : closable$$

である．

Proof.

$$A \coloneqq S - T, \quad T(x) \coloneqq T + xA, \quad x \in [0,1]$$

として $A, T(x)$ を定める．$T(0)=T, T(1)=S$ であることに注意する．$b_1=b_2=0$ の時は A が $D(T)$ 上有界になるので明らかだから，少なくとも一方は 0 でないとする (後述する δ が無限大でないことを言うための仮定である)．まず，

$$\exists \delta > 0, \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow T(x) : \text{closable} \quad \Leftrightarrow \quad T(x') : \text{closable} \tag{3}$$

であることを示そう．これが示されれば，$T(0)=T$ から出発して $T(\frac{\delta}{2}), T(\delta), ..., T(1)=S$ と closable であることが同値になり，証明が終わる．$u \in D(T)$ と $x \in [0,1]$ が任意に与えられたとする．

$$\begin{aligned}Tu &= T(x)u - xAu \\ Su &= T(x)u + (1-x)Au\end{aligned}$$

となるから，仮定の不等式から $b \coloneqq \max\{b_1, b_2\}$ として

$$\begin{aligned}\|Au\|_Y &\leq a\|u\|_X + b_1\|T(x)u + (1-x)Au\|_Y + b_2\|T(x)u - xAu\|_Y \\ &\leq a\|u\|_X + (b_1+b_2)\|T(x)u\|_Y + (b_1(1-x) + b_2 x)\,\|Au\|_Y \\ &\leq a\|u\|_X + (b_1+b_2)\|T(x)u\|_Y + b\|Au\|_Y\end{aligned}$$

が成り立つ．$b_1 < 1, b_2 < 1$ より $b < 1$ だから，移項して整理すると

$$\|Au\|_Y \leq a(1-b)^{-1}\|u\|_X + (b_1+b_2)(1-b)^{-1}\|T(x)u\|_Y \tag{4}$$

である．

$$\delta \coloneqq (b_1+b_2)^{-1}(1-b)$$

と置くと，(3) の条件を満たすことを示す．$x, x' \in [0,1], |x-x'| < \delta$ と仮定する．不等式 (4) から，

$$\|(x-x')Au\|_Y \leq |x-x'|a(1-b)^{-1}\|u\|_X + |x-x'|(b_1+b_2)(1-b)^{-1}\|T(x)u\|_Y$$

となる．$|x-x'|(b_1+b_2)(1-b)^{-1} < \delta(b_1+b_2)(1-b)^{-1} = 1$ だから，$(x-x')A$ は T(x)-bounded であり，T(x)-bound は 1 より真に小さい．したがって Theorem 2.7 を $T = T(x), A = (x'-x)A$ として用いると，$S = T + A = T(x')$ であり，

$$T = T(x) : \text{closable} \quad \Leftrightarrow \quad S = T(x') : \text{closable}$$

が得られるから，(3) が成立する．以上により示された． □