けんろん！　　3/23 #sss2017　　@paper3510mm.

参考文献.

- T. Leinster, Basic Category Theory (邦訳: ベーシック圏論)
- E. Riehl, Category theory in context
- S. MacLane, Categories for the Working Mathematicians (邦訳: 圏論の基礎)

圏論の役割は大きく2つ.

- 具体 → 抽象: 具体的な事実をまとめて統一的に扱う.　いたるところで普遍性が現れるのがよくわかる.
- 抽象 → 具体: 抽象的な視点から新たな関係性を探る.　こっちがおもしろい.

(一つ目の例として、Set, Top, … の直積はすべて同じ. さらに limit の一つとみなせること.
二つ目の例は…. ムズかしい.)

数学的対象や構造を理解する際に、
その記述に要する下部構造を忘れてしまい、
その上澄みの~~構造~~関係性だけをみることにより, 初めて見えてくるものがある.

→ これを扱うのが圏論.

(引用) 圏論 = 「上部構造の論理を取り扱う言語」.

(しかも、圏論では、下部構造という「実体」のないものでも扱える)

圏論は、数学的対象の間の関係性を扱う.

圏 $\begin{cases} \text{「対象」} = \text{数学的対象.} \\ \text{「射」} = \text{その間の関係性をとりもつ.} \end{cases}$

圏ももちろん数学的対象

⇝ 圏と圏の間の関係性が調べたくなる = 関手.

さらに、関手と関手の間の射 = 自然変換もある.

Def

圏$\mathcal{C}$とは、

　対象 $X, Y, Z, \cdots$ の集まり ob$\mathcal{C}$、

　射 $f, g, h, \cdots$ 　の集まり mor$\mathcal{C}$

の組であって、

- 任意の射 f に対し、fのドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{dom} f$ をえる対応 dom.
- 任意の射 f に対し、fのコドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{cod} f$ をえる対応 cod.

$\mathrm{dom} f = X$, $\mathrm{cod} f = Y$ のとき、$f: X \to Y$ とかく。

- 任意の対象 X に対し、恒等射と呼ばれる射 id_X をえる対応 id.
- $\mathrm{cod} f$ と $\mathrm{dom} g$ が等しいような任意の射 f, g に対し、ドメインが $\mathrm{dom} f$ で、コドメインが $\mathrm{cod} g$ であるような射 $g \circ f$ をえる対応 $\circ$

fとgは合成可能という

$X \xrightarrow{f} Y,\ Y \xrightarrow{g} Z \rightsquigarrow X \xrightarrow{g \circ f} Z$

を備えたもの $\mathcal{C} = (\mathrm{ob}\mathcal{C}, \mathrm{mor}\mathcal{C}; \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \circ)$ で、条件

- 単位元律：任意の射 $f: X \to Y$ に対し、$f \circ id_X = f$, $id_Y \circ f = f$
- 結合律：合成可能な任意の f, g, h に対し、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

をみたすもの

Example

- $\mathbf{Set}$ $\begin{cases} \text{ob}: 集合 \\ \text{mor}: 写像 \end{cases}$
- $\mathbf{Grp}$ $\begin{cases} \text{ob}: 群 \\ \text{mor}: 群準同型 \end{cases}$
- $\mathbf{Ring}$ $\begin{cases} \text{ob}: 環 \\ \text{mor}: 環準同型 \end{cases}$
- $\mathbf{Vect}_k$ $\begin{cases} \text{ob}: k上の線型空間 \\ \text{mor}: 線型写像 \end{cases}$
- $\mathbf{Top}$ $\begin{cases} \text{ob}: 位相空間 \\ \text{mor}: 連続写像 \end{cases}$
- $\mathbf{Manifold}$ $\begin{cases} \text{ob}: C^\infty級多様体 \\ \text{mor}: C^\infty級写像 \end{cases}$
- $\mathbf{Poset}$ $\begin{cases} \text{ob}: 順序集合 \\ \text{mor}: 順序を保つ写像 \end{cases}$
- $\mathbf{Meas.}$ $\begin{cases} \text{ob}: 可測空間 \\ \text{mor}: 可測関数 \end{cases}$

Def

XからYへの射全体を、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ とかく。

以下では、$\mathcal{C}$: locally small を仮定。　そんなに大きくない

$:\Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は set.

対象の間の関係性として、"同じ"という関係性は重要

<u>Def</u>

$\mathcal{C}$: cat. において、$f : X \to Y$ が同型射であるとは、

$${}^{\exists} g : Y \to X \in \mathrm{mor}\,\mathcal{C}, \quad g \circ f = id_X,\ f \circ g = id_Y$$

このとき、X と Y は同型であるといい、$X \cong Y$ とかく。

<u>Example.</u>

$\mathbf{Set}$ での iso = 全単射.
$\mathbf{Grp}$ 〃 = 群同型.
$\mathbf{Ring}$ 〃 = 環同型
$\mathbf{Top}$ 〃 = 同相.
$\mathbf{Man}$. = 微分同相.
$\mathbf{Poset}$ = 順序同型. etc...

これだけみても、
個別の対象における同型という
概念が、対象の同型という形
で統一的に扱えているのがわかる.

今挙げた例は、どれも集合に構造がのったものを対象とし、
その構造を保つ関数を射とする圏
しかも、どの対象も実体がある.

しかし、すべての圏がこうであるわけではない.
一般に、圏の対象は、単なる「付加構造つき集合」ではないし、
射は元の対応規則ではない.

(引用) 圏の対象は、ほんのわずかでも集合のようである必要はないし、
圏の射は、これっぽっちも関数のようである必要はない.

圏はもっと広大な概念だ.

Example

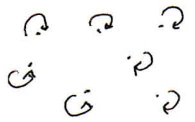
・$\mathbb{1}$: $\bullet \circlearrowleft^{id}$ は圏 (確かに圏の公理をみたす)

・$\mathbb{2}$: $\bullet \to \bullet$ は圏

・$\mathbb{3}$: $\bullet \to \bullet \to \bullet$ も圏

・$\mathbb{0}$: 何もない圏も cat. (零圏 or 空圏)

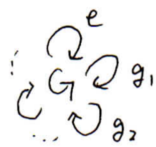
・離散圏 :



id以外の射をもたない。
(対象同士の関係がない)

└ 一つの集合は、この意味で圏とみなせる。

・群 G それ自身も圏 :



ob : G.
mor : G の元 $e, g_1, g_2, \cdots$
id_G = G の単位元 e.
$\circ$ = G の演算.

〜 monoidで十分
(可逆性はなくてもいい)

・順序集合 $(P, \leq)$ それ自身も圏 :

ob : P の元 $a, b, c, \cdots$
mor : $a \to b$ $:\Leftrightarrow$ $a \leq b$.
id = 反射律
合成 $\circ$ = 推移律

〜 前順序で十分
(反対称律はなくても catとみなせる)

$$a \leq b \leq c \leq e, \quad b \leq d$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[r] \arrow[dr] & c \arrow[r] & e \\ & & d & \end{tikzcd}$$

・こんなのも圏 :

R : 単位的環 とするとき.

$$Mat_R \begin{cases} ob : n \in \mathbb{Z}. \\ mor : n \xrightarrow{A} m \iff A : R\text{上の } m \times n \text{ 行列} \end{cases}$$

とすると cat. をなす.

合成は、行列の積 :

$$n \xrightarrow{A} m, \quad m \xrightarrow{B} k \quad \rightsquigarrow \quad n \xrightarrow{B \cdot A} k$$

このように、圏はどこにでもいる。

Def

$\mathcal{C}$: cat に対し、次のようにして圏$\mathcal{C}^{op}$が得られる

$\mathcal{C}^{op}$ の ob = $\mathcal{C}$ の ob.

$\mathcal{C}^{op}$ の mor = $\mathcal{C}$ の mor $f: X \to Y$ に対して、$f^{op}: Y \to X$.

つまり、射の向きを逆にした圏

これを反対圏 or 双対圏 という.

× Thm (双対原理)

圏$\mathcal{C}$での証明で、射の矢印の向きを逆にすると、

圏$\mathcal{C}^{op}$での証明が得られる。(これをもとの双対という)

この意味で、一つの証明は、2つのThmを示すことになる.

次に圏と圏の間の射.

Def

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$: cat に対し、$\mathcal{C}$から$\mathcal{D}$への関手Fとは、

- $\mathcal{C}$の対象cに対し、$\mathcal{D}$の対象Fcをえる対応.
- $\mathcal{C}$の射 $f: c \to c'$ に対し、$\mathcal{D}$の射 $Ff: Fc \to Fc'$ をえる対応.

の組で、条件

- 合成可能な任意の$\mathcal{C}$の射f, gに対し、$Fg \circ Ff = F(g \circ f)$
- 任意の$\mathcal{C}$の対象cに対し、$F(id_c) = id_{Fc}$.

をみたすもの.

このとき、$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ とかく.

Def

関手$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$があれば、双対的に、関手$\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$が考えられる.

この関手$\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$を、$\mathcal{C}$から$\mathcal{D}$への反変関手といい、

もとの$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$を、$\mathcal{C}$から$\mathcal{D}$への共変関手という.

← 何で反変かは、

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{op} & \mathcal{C} \arrow[r, mapsto] & \mathcal{D} \\
c \arrow[d] & c & Fc \\
c' \arrow[r, leftrightarrow] & c' \arrow[u] \arrow[r] & Fc' \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

矢印が逆向き.

* └ 特に、$\mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ を presheaf という.

Example

- $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$: 群構造を忘れる : 俗に忘却関手という.

$$\begin{array}{ccc} G & \longmapsto & U(G) \leftarrow \text{ただの集合.} \\ f\downarrow & \mapsto & \downarrow Uf \leftarrow \text{ただの写像.} \\ H & \longmapsto & U(H) \end{array}$$

- 恒等関手 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.

- $\mathcal{C}$: locally small cat. とする. $c \in \mathcal{C}$ に対し、

$$\begin{array}{cccccl} \mathcal{C}(c,-) : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set}. & & : \text{共変.} \\ & \Psi & & \Psi & & \\ & d & \longmapsto & \mathcal{C}(c,d) & \leftarrow c \to d \text{ 全体.} & \\ & f\downarrow & \mapsto & \downarrow f_* & & \\ & e & \longmapsto & \mathcal{C}(c,e) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccl} \mathcal{C}(-,c) : & \mathcal{C}^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set}. & : \text{反変.} \\ & \Psi & & \Psi & \\ & d & \longmapsto & \mathcal{C}(d,c) & \\ & f\downarrow & \mapsto & \uparrow f^* & \\ & e & \longmapsto & \mathcal{C}(e,c) & \end{array}$$

- V : k-linear sp. に対し、$V^* = \{ f : V \to k \mid f : \text{linear} \}$: V の双対空間 とおくと、V^* もまた k-linear sp.

これによって、関手 $(\ )^* : \mathbf{Vect}_k^{op} \longrightarrow \mathbf{Vect}_k$ が定まる.

$$\begin{array}{ccccc} \Psi & & \Psi & & \\ V & \longmapsto & V^* & & \ni g \circ f : V \to W \to k. \\ f\downarrow & \mapsto & \uparrow f^* = - \circ f. & & \uparrow \\ W & \longmapsto & W^* & & \ni g : W \to k \end{array}$$

Def

対象を圏とし、射を関手とすると、これらは圏をなす.
これを圏の圏といい、CAT とかく.

Def

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$: cat が、CAT の ob として同型 :

i.e. $^\exists F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $^\exists G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$

s.t. $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$

のとき、圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は同型であるといい、$\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ とかく.

次に関手の間の射.

Def

$\mathcal{C},\mathcal{D}$: cat. $F,G:\mathcal{C}\rightrightarrows\mathcal{D}$: functor に対し、

F から G への自然変換 α とは、

・任意の $c\in\mathcal{C}$ に対して、$\mathcal{D}$ の射 $\alpha_c: Fc\to Gc$ を与える対応 α

であって、条件

・自然性：任意の $\mathcal{C}$ の射 $f: c\to c'$ に対し、

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fc' \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & Gc' \end{tikzcd} \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$c\xrightarrow{f}c'$ に対し、$Fc\to Gc'$ が唯一つ定まる

をみたすもの.

このとき、$\alpha=(\alpha_c)_{c\in\mathcal{C}}: F\Rightarrow G$ とかく.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\alpha"] \end{tikzcd}$$ ともかく.

Def (垂直合成)

$\alpha: F\Rightarrow G,\ \beta: G\Rightarrow H$ のとき、$\beta\circ\alpha$ を

$$(\beta\circ\alpha)_c := \beta_c\circ\alpha_c : Fc\xrightarrow{\alpha_c}Gc\xrightarrow{\beta_c}Hc$$

と定めると、$\beta\circ\alpha$ は自然変換となる.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=H}] & \mathcal{D} \arrow[from=F, to=G, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[from=G, to=H, phantom, "\Downarrow\beta"] \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] \end{tikzcd}$$

Def

~~$\mathcal{C},\mathcal{D}$: cat~~

対象を関手とし、射を自然変換とすると、これらは

射の合成を垂直合成として、圏をなす.

これを関手圏といい、$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ とかく.

自然変換は、ただの関手圏の射ではない。

Example.

CRing：単位的可換環の圏

Monoid：モノイドの圏

$$\begin{array}{rccc} M_n : & \mathrm{CRing} & \longrightarrow & \mathrm{Monoid} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & R & \longmapsto & M_n(R) = \{R\text{上の } n \times n \text{ 行列全体の集合}\} \end{array}$$

乗法についてモノイドとなる。

$$\begin{array}{rccc} U : & \mathrm{CRing} & \longrightarrow & \mathrm{Monoid} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & R & \longmapsto & U(R) \end{array}$$

U：忘却関手。$U(R)$：乗法についてモノイドとみなす。

を考える。$R \in \mathrm{CRing}$ を固定したとき、

$X \in M_n(R)$ に対して、その行列式 $\det_R(X)$ を考えると、

$$\det_R(XY) = \det_R(X)\det_R(Y)$$

$$\det_R(I) = 1$$

だから、$\det_R : M_n(R) \longrightarrow U(R)$ はモノイド準同型。

つまり、$\det_R \in \mathrm{mor}\,\mathrm{Monoid}$ が得られる。

これらを集めた $\det = (\det_R)_{R \in \mathrm{CRing}} : M_n \Longrightarrow U$ は自然変換となる。

自然性が示すのは、行列式がすべての環で一様に定義されているということ。

つまり、ある環上の行列について行列式はこう定義するが、

別の環については違う方法で定義する、ということはしない。

一般的にいえば、自然性は、族 $(\alpha_c)_{c \in \mathcal{C}}$ がすべての $c \in \mathcal{C}$ にわたって

一様に定義されているという考え方を捉えたもの。

Def

F, G : functor が $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ の ob として同型のとき、

FとGは自然同型であるといい、 $\alpha : F \cong G$ とかく.

Lem

これは、

$$\forall c \in \mathcal{C},\quad \alpha_c : Fc \xrightarrow{\cong} Gc : \mathrm{iso}$$

と同値.

Def

$F \cong G$ (nat. iso) のとき、

$$c \in \mathcal{C} \text{ について自然に } Fc \cong Gc$$

という.

これは、ただ各 $c \in \mathcal{C}$ に対して、$Fc \cong Gc$ in $\mathcal{D}$ が成り立つだけでなく、
$c \in \mathcal{C}$ についての自然性も成り立つということ.
先の例からいえば、すべての $c \in \mathcal{C}$ にわたって一様に同型だということ.

Example

Vect_k^{fd}：有限次元線型空間の圏

$(\ )^*: \mathrm{Vect}_k^{op} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ は反変関手だったから、

$$(\ )^{**}: \mathrm{Vect}_k^{fd} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k^{fd} \text{：共変}$$

がえられる。

線型代数のギロンによって、

$$V \cong V^{**}$$

これは、

$$\mathrm{Id}(V) \cong V^{**} \quad \text{for each } V \in \mathrm{Vect}_k^{fd}$$

ということだから、Lemより、自然同型

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_k^{fd} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}"] \arrow[r, bend right, "(\ )^{**}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\cong"] & \mathrm{Vect}_k^{fd} \end{tikzcd}$$

が定まっているということ。

線型代数において、

「自然に $V \cong V^{**}$ が成立」

とかいてあったの~~は~~、

この「自然」は、自然変換の意味で自然ということだったのだ。

Vにわたって一様に同型

また線型代数において、

$$V \cong V^*$$

も成り立つが、これは自然ではない。　恣意的

これを示すには、各Vに対し、基底を定めねばならず、

一様な同型ではないから

どの圏の上で考えるかが重要

＊ canonical ＝「天与の」

「恣意的な選択を用いることなく定義された」

cf) 自然同型は別な概念をも誘導する.

同型 $F: \mathcal{C} \cong \mathcal{D} : G$ とは,

$$G \circ F = Id_{\mathcal{C}} \quad かつ \quad F \circ G = Id_{\mathcal{D}}.$$

この同一性が非常に強い.

これをゆるめたのが圏同値という概念

<u>Def</u>

$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が圏同値とは,

$$^{\exists}F : \mathcal{C} \to \mathcal{D},\ ^{\exists}G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$$

$$\text{s.t.}\quad G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}},\ F \circ G \cong Id_{\mathcal{D}} \quad (\text{nat. iso})$$

このとき, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ とかく.

<u>Def</u>

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について,

F : faithful $\Leftrightarrow$ $^{\forall}c, c' \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(c, c') \to \mathcal{D}(Fc, Fc')$: inj.

F : full $\Leftrightarrow$ $^{\forall}c, c' \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(c, c') \to \mathcal{D}(Fc, Fc')$: sur.

F : essentially sur. on objects $\Leftrightarrow$ $^{\forall}d \in \mathcal{D}$, $^{\exists}c \in \mathcal{C}$, $Fc \cong d$.

<u>Prop</u>

F : 圏同値

$\Leftrightarrow$ F : fully faithful and essentially sur.

<u>Def</u>

$\mathcal{C}^{op} \simeq \mathcal{D}$ を, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の双対性という.

ex). Stone双対性.

Gelfand-Naimark双対性.

Pontryagin双対性.

最後に米田の補題を示す.
これはとても重要で、非自明な結果.

・随伴
・表現可能
・極限
のどこでも使われる

__Thm__ (米田の補題)

$\mathcal{C}$: locally small とする. $c \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{S}et^{\mathcal{C}}$ について、自然に

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c,-), F) \cong Fc \quad \text{in } \mathcal{S}et.$$

が成り立つ.

__proof__

sketch

① $c \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{S}et^{\mathcal{C}}$ に対し、

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c,-), F) & \longrightarrow & Fc \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \alpha : \mathcal{C}(c,-) \Rightarrow F & \longmapsto & \alpha_c(1_c) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & Fc & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c,-), F) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & \Psi(x) : \mathcal{C}(c,-) \Rightarrow F \end{array}$$

$$\text{s.t. } \Psi(x)_d : \mathcal{C}(c,d) \longrightarrow Fd$$

$$c \xrightarrow{f} d \ \mapsto \ \Psi(x)_d(f) = Ff(x)$$

を定める.

② $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$, $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ を示す.

③ Φ が $c \in \mathcal{C}$ について natural

④ Φ が $F \in \mathcal{S}et^{\mathcal{C}}$ について natural

これが示すのは、

$$ev : \mathcal{C} \times \mathcal{S}et^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{S}et : (c, F) \longmapsto Fc.$$

$$y : \mathcal{C} \longrightarrow (\mathcal{S}et^{\mathcal{C}})^{op} : c \longmapsto \mathcal{C}(c,-)$$

$$\mathrm{Hom}(y(-),-) : \mathcal{C} \times \mathcal{S}et^{\mathcal{C}} \xrightarrow{y \times Id} (\mathcal{S}et^{\mathcal{C}})^{op} \times \mathcal{S}et^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}} \mathcal{S}et$$

とするとき、

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \times \mathcal{S}et^{\mathcal{C}} \arrow[r, bend left, "{\mathrm{Hom}(y(-),-)}"] \arrow[r, bend right, "ev"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Phi \cong"] & \mathcal{S}et \end{tikzcd}$$