論理と位相

@paper3510mm

平成 30 年 1 月 24 日

これは，2017 年 6 月 11 日 (日) に京都大学で行われた数物セミナー談話会の「論理と位相」の講演ノートです．[2017/12 追記] 加筆修正しました．

論理と位相のつながりを紹介し命題論理のコンパクト性を示すのがこのノートの目的．§ 1 で命題論理の基本概念を整理しコンパクト性定理の主張を述べる．§ 2 でブール代数の言葉をまとめ，論理の形式体系から代数構造を取り出せることを示し，一方でこれが付値の空間の閉開集合のなすブール代数と同型であることを示す．§ 3 でこの同型を用いてコンパクト性定理を証明する．この際コンパクト性定理の主張が，付値の空間のコンパクト性に対応することを見る．§ 4 でおわりに一言．

1　命題論理とコンパクト性定理

まずは命題論理の基本的なことを整理し，コンパクト性定理の主張を述べる．

1.1　命題論理

P を集合とする．この P の元を命題変数と呼ぶことにする．

> **定義 1.1.** 論理式 (formula) を，次のように再帰的に定義する：
>
> - 命題変数は論理式
> - ϕ,ψ が論理式なら $\neg\phi, \phi \to \psi$ も論理式
>
> こうして得られた論理式全体の集合を F とする．もちろん $P \subset F$ である．記号 $\neg$(not),$\to$(implies) は，論理式から新たな論理式をつくるもの (関数) であり論理結合子と呼ばれる．

定義 1.2. 論理結合子 $\vee$(or),$\wedge$(and) を論理式 ϕ, ψ に対して

$$\phi \vee \psi = (\neg\phi) \to \psi$$
$$\phi \wedge \psi = \neg(\phi \to \neg\psi)$$

によって定義する．ここでは $\neg$ と $\to$ を基本となる論理演算子とし，$\vee$ と $\wedge$ は上のような論理式の省略記号と解釈する．

数理論理学には，論理式の真偽を集合で実現したものを問題とする意味論 (semantics) と形式体系における推論を対象とする構文論 (syntax) の二つの立場がある．まずは前者からはじめる．

意味論の立場では，各命題変数への真あるいは偽の割り当てに対して論理式が真であるか偽であるかを代数的な計算で調べる．

$2 = \{0, 1\}$ とおき，これを自然にブール代数 $(2, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ とみなす（詳しくは次節に譲るが，通常の真理値計算の規則を与えたと思えばよい）．ブール代数上の二項演算 $\Rightarrow$ を $(a \Rightarrow b) := \neg a \vee b$ と定義する．

定義 1.3. 命題変数の集合 P から 2 への写像 $v : P \to 2$(真偽の割り当て) に対して

$$v(\phi \to \psi) = (v(\phi) \Rightarrow v(\psi))$$
$$v(\neg\phi) = \neg v(\phi)$$

と定めることによって論理式の集合 F から 2 への写像 $v : F \to 2$ へと拡張できる．これを付値 (valuation) という．

命題 1.4. 論理式 ϕ, ψ に対して次が成立：

$$v(\phi \vee \psi) = v(\phi) \vee v(\psi)$$
$$v(\phi \wedge \psi) = v(\phi) \wedge v(\psi)$$

証明. $\vee, \wedge$ は $\neg, \to$ を含む論理式の省略記号だったことを思い出せばよい． □

命題 1.5. 論理式 ϕ, ψ に対して

$$v(\phi \to \phi) = 1$$
$$v((\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)) = 1$$

証明. ブール代数の計算によりわかる (あるいは真理値の計算による). □

定義 1.6. 任意の付値 v について $v(\phi) = 1$ となるとき，論理式 ϕ はトートロジーであるという.

例えば論理式 $\phi \to \phi$ や $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$ はトートロジーである.
付値やトートロジーは意味論における概念である.

論理学のもう一つの立場は，構文論である．論理式に意味を与えず形式的な議論を行う.

定義 1.7. 次の形の論理式を axiom という：

(L1) $\phi \to (\psi \to \phi)$

(L2) $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$

(L3) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$

ただし，ϕ, ψ, χ は任意の論理式.

論理式 ϕ と $\phi \to \psi$ から別な論理式 ψ を得る対応をモーデス・ポネンス (modus ponens, MP) の推論規則という．axiom (L1)〜(L3) と推論規則 MP を備えた論理式の集合 F を，命題論理の形式体系という.

定義 1.8. 論理式の列 $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ が proof であるとは，各 ϕ_i についてそれが axiom であるか，または列の前にある二つの論理式から MP の適用によって得られているときをいう．論理式の列 $(\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi)$ が proof であるとき，論理式 $\phi \in F$ は theorem であるといい，このとき $\vdash \phi$ とかく.

命題 1.9. 論理式 $\phi \to \phi$ は theorem である.

証明. 以下は proof をたてに並べたものである．右側にある括弧は，その論理式が得られる理由を示す.

$$[\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)] \to [(\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)] \qquad \text{(L2)}$$
$$\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi) \qquad \text{(L1)}$$
$$(\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi) \qquad \text{(MP)}$$
$$\phi \to (\phi \to \phi) \qquad \text{(L1)}$$
$$\phi \to \phi \qquad \text{(MP)}$$

したがって，$\vdash \phi \to \phi$ が得られた. □

proof や theorem は構文論における概念である.

トートロジーも theorem もそれぞれの立場においてその論理式が”真である”,”証明できる”といった感覚に対応する概念であるが，これらの間には当然密接な関係がある．

定理 1.10 (健全性定理)**.** theorem はトートロジーである．

証明. theorem の定義から，axiom がトートロジーであることと、MP によってトートロジーとトートロジーからトートロジーが得られることを示せばよい．axiom(L3) がトートロジーであることはすでに述べた．v を任意の付値とする．

(L1) について．$\chi = \phi \to (\psi \to \phi)$ とおくと，$v(\chi) = v(\phi) \Rightarrow (v(\psi) \Rightarrow v(\phi))$ であり，$v(\phi) = 0$ ならこれは 1．$v(\phi) = 1$ でも $v(\chi) = (v(\psi) \Rightarrow v(\phi)) = 1$ となり，トートロジー．

(L2) について．$\omega = (\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$ とおくと，$v(\omega) = (v(\phi) \Rightarrow (v(\psi) \Rightarrow v(\chi))) \Rightarrow ((v(\phi) \Rightarrow v(\psi)) \Rightarrow (v(\phi) \Rightarrow v(\chi)))$ である．$v(\phi) = 0$ のときは $v(\omega) = (1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 1)) = 1$ となり，$v(\phi) = 1$ のときは $v(\omega) = ((v(\psi) \Rightarrow v(\chi)) \Rightarrow (v(\psi) \Rightarrow v(\chi))) = 1$ となる．よってトートロジー．

(MP) について．$\phi, \phi \to \psi$ がトートロジーであるとすると，$1 = v(\phi \to \psi) = (v(\phi) \Rightarrow v(\psi)) = (1 \Rightarrow v(\psi)) = v(\psi)$ より ψ はトートロジー． □

定理 1.11 (完全性定理)**.** 論理式がトートロジーならば theorem である．

完全性定理は 2.2 節で示すことにする．

健全性定理と完全性定理よりトートロジーであることと theorem であることは同値となる．これは論理を意味論の立場で考えても構文論の立場で考えても同じ結果を得ることを保証する (意味論と構文論の等価性)．この同値性を完全性定理と呼ぶこともある．

もう少し構文論の立場の道具を整理しよう．

命題 1.9 のような「ϕ ならば ϕ」という単純な theorem であってもその proof はかなり長いものになる．そこで，既知の proof を組み合わせて複雑な proof を構成できるよう proof の概念を拡張する．

定義 1.12. 論理式の集合の部分集合を $\Gamma \subset F$ とする．論理式の列 $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ が Γ からの deduction であるとは，各 ϕ_i についてそれが axiom か，Γ の元であるか，あるいは列の前にある二つの論理式から MP の適応によって得られているときをいう．このとき，この deduction の長さは n であるという．$(\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi)$ が Γ からの deduction であるとき，論理式 $\phi \in F$ は Γ から演繹されるといい，$\Gamma \vdash \phi$ とかく．特に $\Gamma = \emptyset$ のとに対応するのが，proof と theorem である．

定理 1.13 (演繹定理)**.** $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ ならば $\Gamma \vdash (\phi \to \psi)$ である．逆も成り立つ．

証明. $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ を表す deduction の長さ n についての帰納法によって示す．

$n = 1$ の場合，$\psi = \phi$ であるか，ψ は axiom または Γ の元であるかである．$\psi = \phi$ のときは $\vdash \phi \to \phi$ であるから定理は成り立つ．その他の場合は次の deduction

$$
\begin{aligned}
&\psi \\
&\psi \to (\phi \to \psi) && \text{(L1)} \\
&\phi \to \psi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

より $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ がわかる．

$n > 1$ の場合，長さ $n - 1$ 以下の deduction について定理が成り立っているとする．ψ が axiom であるか Γ の元であるときは，上と同様．そうでないとき，ψ はその deduction で前にある χ と $\chi \to \psi$ に MP を適用して得られている．帰納法の仮定から $\Gamma \vdash \phi \to \chi$ かつ $\Gamma \vdash \phi \to (\chi \to \psi)$ が成立している．したがって，それらの deduction を次の論理式の列

$$
\begin{aligned}
&\phi \to \chi \\
&\phi \to (\chi \to \psi) \\
&(\phi \to (\chi \to \psi)) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi)) && \text{(L2)} \\
&(\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi) && \text{(MP)} \\
&\phi \to \psi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

の前に付け加えると Γ からの deduction となり，$\Gamma \vdash \phi \to \psi$ が得られた．

逆については，$\Gamma \cup \{\phi\} \vdash (\phi \to \psi)$ と $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \phi$ より MP を適用してわかる． □

定理 1.14. $\{\phi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash (\phi \to \chi)$

証明. deduction

$$
\begin{aligned}
&\phi \to \psi \\
&\psi \to \chi \\
&\phi \\
&\psi && \text{(MP)} \\
&\chi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

より，$\{\phi \to \psi, \psi \to \chi\} \cup \{\phi\} \vdash \chi$ が得られ，演繹定理より $\{\phi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash (\phi \to \chi)$. □

演繹定理とこの定理より，$\Gamma \vdash (\phi \to \psi)$ かつ $\Gamma \vdash (\psi \to \chi)$ なら，$\Gamma \vdash (\phi \to \chi)$ となる．これを三段論法 (hypothetical syllogism, HS) という．

一方で，コンパクト性定理は意味論の立場における定理である．

定義 1.15. $\Gamma \subset F$ がモデルをもつとは，すべての $\phi \in \Gamma$ に対し $v(\phi) = 1$ となる付値 v が存在するときをいう (充足可能であるともいう)．このときの付値 v のことを Γ のモデルという．

定理 1.16 (コンパクト性定理)**.** 論理式からなる集合 Γ がモデルをもつ必要十分条件は，その任意の有限部分集合がモデルをもつことである．

モデルをもつという言葉に馴染みがなければ，無矛盾であることと同値であると思ってよい (今は無矛盾の定義も同値性の証明も述べていないが．モデルの存在は意味論における概念で，無矛盾は構文論における概念．これらの等価性は健全性定理と完全性定理が保証する)．

でもいったい，なにがコンパクトなのでしょう？ 私，気になります！

2 Lindenbaum 代数と付値の空間

2.1 ブール代数

いったん論理のことを忘れて，ブール代数の基礎概念について解説する．
$(P, \leq)$ を順序集合とする．

定義 2.1. 部分集合 $S \subset P$ に対して，元 $a \in P$ が，任意の $s \in S$ に対し $s \leq a$ を満たすとき，a は S の上界であるという．さらに S の上界 a が最小上界である，すなわち任意の S の上界 a' に対して $a \leq a'$ を満たすとき，a は S の join であるといい $a = \vee S$ とかく．

定義 2.2. 部分集合 $S \subset P$ に対して，元 $b \in P$ が，任意の $s \in S$ に対し $b \leq s$ を満たすとき，b は S の下界であるという．さらに S の下界 b が最大下界である，すなわち任意の S の下界 b' に対して $b' \leq b$ を満たすとき，b は S の meet であるといい $b = \wedge S$ とかく．

特に，$\{a, b\} \subset P$ に対し，$\vee\{a, b\} = a \vee b$，$\wedge\{a, b\} = a \wedge b$ とかく．

定義 2.3 (束)**.** 順序集合 P が束 (lattice) であるとは，P がすべての有限 join と有限 meet を持つ，すなわちそのすべての有限部分集合が join と meet を持つときをいう．

P が束のとき，$\emptyset \subset P$ の join と meet として，最小元 $0 = \vee\emptyset$ と最大元 $1 = \wedge\emptyset$ が存在する．

逆に，join と meet を集合 P 上の適当な条件をみたす二項演算

$$\begin{aligned} \vee : P \times P \ni (a, b) \longmapsto a \vee b \in P \\ \wedge : P \times P \ni (a, b) \longmapsto a \wedge b \in P \end{aligned}$$

とみなせば，束はこれらと最小元 0 と最大元 1 の組 $(P, \vee, \wedge, 0, 1)$ で指定される．このとき，P の順序は

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \vee b = b$$

によって再現される．

定義 2.4. A と B を束とする．写像 $f : A \to B$ が束準同型であるとは，すべての有限 join と有限 meet を保つ，すなわち

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

をみたすときをいう．

束準同型 f が全単射のとき束同型であるといい，束同型が存在するとき A と B は同型であるという．

束においては $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ が成立する．なぜなら，$b \vee c \geq b, c$ より $a \wedge (b \vee c) \geq a \wedge b, a \wedge c$ となり $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ を得る．逆の不等号は一般には成り立たない．

定義 2.5. 束において，

$$\begin{aligned} \text{分配律} : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ \text{双対分配律} : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

が成り立つとき分配束という．実は分配律だけでも定義としては十分である．

補題 2.6. 束が分配律をみたすとき双対分配律もみたす．

証明. 吸収律：

$$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a$$

と分配律を使えば，

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c) \end{aligned}$$

□

定義 2.7. 束において

$$a \wedge x = 0, \quad a \vee x = 1$$

なる元 x を，a の補元という．

分配束において，a の補元は存在すれば一意的となる．なぜならば，x と y が a の補元だとすると，$x = x \wedge 1 = x \wedge (a \vee y) = x \wedge y$ より $x = y$ となるからである．これを $\neg a$ とかく．明らかに $\neg\neg a = a$ が成り立つ．

定義 2.8. すべての元が補元を持つ分配束をブール代数という．

例えば $2 = \{0, 1\}$ は最大元と最小元のみ持つブール代数とみなせる．集合 A に対しそのベキ集合 $\mathcal{P}(A)$ は集合の包含関係を順序としてブール代数をなす．位相空間 X の開集合系を $\mathcal{O}(X)$ とかくと，これは分配束となるがブール代数ではない．X の閉かつ開な集合 (clopen) 全体を $\mathrm{clop}(X)$ とすればこれはブール代数となる．

命題 2.9 (De Morgan の法則)**.** ブール代数において

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$
$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

が成立．

証明.

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &= ((a \wedge b) \wedge \neg a) \vee ((a \wedge b) \wedge \neg b) \\
&= ((a \wedge \neg a) \wedge b) \vee (a \wedge (b \wedge \neg b)) \\
&= (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) \\
&= 0 \vee 0 = 0 \\
(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) &= (a \vee (\neg a \vee \neg b)) \wedge (b \vee (\neg a \vee \neg b)) \\
&= ((a \vee \neg a) \vee \neg b)) \wedge (\neg a \vee (b \vee \neg b)) \\
&= (1 \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee 1) \\
&= 1 \wedge 1 = 1
\end{aligned}$$

より補元の一意性から $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ を得る．$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ も同様． □

補題 2.10. ブール代数からブール代数への束準同型は演算 $\neg$ を保つ．

証明. A と B をブール代数とし，$f : A \to B$ を束準同型とする．$a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$ であるから，$f(a) \wedge f(\neg a) = 0$, $f(a) \vee f(\neg a) = 1$ が成り立ち，補元の一意性から，$f(\neg a) = \neg f(a)$． □

補題 2.11. ブール代数からブール代数への写像 f が，join と $\neg$ あるいは meet と $\neg$ を保てば，束準同型となる．

証明. たとえば join と $\neg$ を保つとすると，

$$\begin{aligned} f(a \wedge b) &= f(\neg\neg(a \wedge b)) = f(\neg(\neg a \vee \neg b)) \\ &= \neg f(\neg a \vee \neg b) = \neg f(\neg a \vee \neg b) \\ &= \neg f(\neg a) \wedge \neg f(\neg b) = f(a) \wedge f(b) \\ f(1) &= f(\neg 0) = \neg f(0) = \neg 0 = 1 \end{aligned}$$

より有限 meet を保ち，束準同型となる．□

これらの補題より，しばしばブール代数の間の束準同型をブール準同型ともいう．

ブール代数 $(P, \vee, \wedge, 0, 1)$ に対して，対称差 $+$ を

$$a + b = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$$

によって定める．このとき簡単な計算によって，P 対称差を和として meet を積とする単位的可換環 $(P, +, \wedge, 0, 1)$ となる．

すべての元がベキ等である単位的可換環をブール環というが，ブール代数からこのようにして得た環は明らかにブール環である．逆にブール環からブール代数をつくることもできる (参照 [2]).

2.2 Lindenbaum 代数

命題論理の形式的体系から代数を取り出す．この小節では常に構文論的な立場をとる．

F を論理式の集合とする．

定義 2.12. F 上の関係 $\leq$ を，

$$\phi \leq \psi \iff \vdash \phi \to \psi$$

と定めるとこれは前順序となる．だが順序ではない．これを順序にするために F 上の同値関係 $\equiv$ を，

$$\phi \equiv \psi \iff \vdash \phi \to \psi \text{ かつ } \vdash \psi \to \phi$$

によって定め，$L = F/\equiv$ とおく．すると F 上の前順序 $\leq$ は L 上の順序を誘導する．この L 上の順序も $\leq$ で表し，$\phi \in F$ の同値類を $|\phi|$ とかく．

命題 2.13. 順序集合 L において，

$$
\begin{aligned}
\text{join} &: |\phi| \vee |\psi| = |\phi \vee \psi| \\
\text{meet} &: |\phi| \wedge |\psi| = |\phi \wedge \psi| \\
\text{max} &: |\phi| = 1 \Leftrightarrow \vdash \phi \\
\text{min} &: |\phi| = 0 \Leftrightarrow \vdash \neg\phi
\end{aligned}
$$

とすると $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ は束をなし，さらに分配律を満たし分配束になる．さらに，$\neg|\phi| = |\neg\phi|$ によって L はブール代数となる．

証明は [1] 参照（気が向けば追加します）．このブール代数 L を，命題論理の Lindenbaum 代数という．付値 v はブール代数の準同型 $v : L \to 2$ とみなされる．

完全性定理を証明しよう．

定理 (完全性定理). 論理式がトートロジーならば theorem である．

証明. 対偶を示す．論理式 ϕ が theorem でないとすると，$|\phi| \neq 1$ である．ここでブール代数 L をブール環と思えば，$\downarrow(|\phi|) := \{|\psi| \in L \mid |\psi| \leq |\phi|\}$ はブール環 L の真のイデアルとなる．したがってこれを含む素イデアル I が存在する．このとき，ｓ像 $v : L \to 2$ を，$|\psi| \in I$ のとき $v(|\psi|) = 0$，$|\psi| \notin I$ のとき $v(|\psi|) = 1$ と定めればこれは束準同型となることがわかる．したがってこれは付値と思えて，定義から $v(|\phi|) = 0$．よって ϕ はトートロジーではない． □

[2017/12 追記] 以下，この小節の終わりまで L がブール代数となることを証明するが，読み飛ばしても構わない．

補題 2.14.

$$\vdash (\neg\phi \to \phi) \to \phi$$

証明. 演繹定理により，$\{(\neg\phi \to \phi)\} \vdash \phi$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&\neg\phi \to \phi \\
&\neg\phi \to (\neg\neg(\neg\phi \to \phi) \to \neg\phi) && \text{(L1)} \\
&(\neg\neg(\neg\phi \to \phi) \to \neg\phi) \to (\phi \to \neg(\neg\phi \to \phi)) && \text{(L3)} \\
&\neg\phi \to (\phi \to \neg(\neg\phi \to \phi)) && \text{(HS)} \\
&(\neg\phi \to (\phi \to \neg(\neg\phi \to \phi))) \to ((\neg\phi \to \phi) \to (\neg\phi \to \neg(\neg\phi \to \phi))) && \text{(L2)} \\
&(\neg\phi \to \phi) \to (\neg\phi \to \neg(\neg\phi \to \phi)) && \text{(MP)} \\
&\neg\phi \to \neg(\neg\phi \to \phi) && \text{(MP)} \\
&(\neg\phi \to \neg(\neg\phi \to \phi)) \to ((\neg\phi \to \phi) \to \phi) && \text{(L3)} \\
&(\neg\phi \to \phi) \to \phi && \text{(MP)} \\
&\phi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

□

> **補題 2.15.**
>
> $$\vdash \neg\phi \to (\phi \to \psi)$$
> $$\vdash \phi \to (\neg\phi \to \psi)$$

証明. いずれも $\{\phi, \neg\phi\} \vdash \psi$ と同値なので，第一式だけ示す．

$$
\begin{aligned}
&\neg\phi \to (\neg\psi \to \neg\phi) && \text{(L1)} \\
&(\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi) && \text{(L3)} \\
&\neg\phi \to (\phi \to \psi) && \text{(HS)}
\end{aligned}
$$

□

この補題の第二式より

$$|\phi| \leq |\neg\phi \to \psi| = |\phi \vee \psi|$$

となる．(L1):$\psi \to (\neg\phi \to \psi)$ より

$$|\psi| \leq |\phi \vee \psi|$$

がわかり，$|\phi \vee \psi|$ は $\{|\phi|, |\psi|\}$ の上界である．

補題 2.16.

$$\vdash \neg\neg\phi \to \phi$$

証明. $\{\neg\neg\phi\} \vdash \phi$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&\neg\neg\phi \\
&\neg\neg\phi \to (\neg\neg\neg\neg\phi \to \neg\neg\phi) && \text{(L1)} \\
&\neg\neg\neg\neg\phi \to \neg\neg\phi && \text{(MP)} \\
&(\neg\neg\neg\neg\phi \to \neg\neg\phi) \to (\neg\phi \to \neg\neg\neg\phi) && \text{(L3)} \\
&\neg\phi \to \neg\neg\neg\phi && \text{(MP)} \\
&(\neg\phi \to \neg\neg\neg\phi) \to (\neg\neg\phi \to \phi) && \text{(L3)} \\
&\neg\neg\phi \to \phi && \text{(MP)} \\
&\phi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

□

補題 2.17.

$$\vdash \phi \to \neg\neg\phi$$

証明.

$$
\begin{aligned}
&(\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi) \to (\phi \to \neg\neg\phi) && \text{(L3)} \\
&\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi && \text{(補題 2.16)} \\
&\phi \to \neg\neg\phi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

二行目は補題 2.16 で得た theorem ということを示しており，その proof を挿入すれば，$\vdash \phi \to \neg\neg\phi$ の proof が完成する． □

補題 2.18.

$$\vdash (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$$

証明. $\{(\phi \to \psi)\} \vdash (\neg\psi \to \neg\phi)$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&\phi \to \psi \\
&\neg\neg\phi \to \phi && \text{(補題 2.16)} \\
&\neg\neg\phi \to \psi && \text{(HS)} \\
&\psi \to \neg\neg\psi && \text{(補題 2.17)} \\
&\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi && \text{(HS)} \\
&(\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi) && \text{(L3)} \\
&\neg\psi \to \neg\phi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

$\square$

補題 2.19.

$$\{(\phi \to \chi), (\psi \to \chi)\} \vdash (\phi \lor \psi) \to \chi$$

証明. $\{(\phi \to \chi), (\psi \to \chi), (\phi \lor \psi)\} \vdash \chi$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\phi \to \chi \\
&\psi \to \chi \\
&\phi \lor \psi = \neg\phi \to \psi \\
&(\phi \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\phi) && \text{(補題 2.18)} \\
&\neg\chi \to \neg\phi && \text{(MP)} \\
&\neg\chi \to \psi && \text{(HS)} \\
&\neg\chi \to \chi && \text{(HS)} \\
&(\neg\chi \to \chi) \to \chi && \text{(補題 2.14)} \\
&\chi && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

$\square$

$|\phi| \le |\chi|$ かつ $|\psi| \le |\chi|$ とする．すると $\vdash \phi \to \chi$ かつ $\vdash \psi \to \chi$ となるが，演繹定理と補題 2.19 より $\vdash (\phi \lor \psi) \to \chi$ となり，$|\phi \lor \psi| \le |\chi|$ を得る．したがって，$|\phi \lor \psi|$ は $\{|\phi|, |\psi|\}$ の最小上界，すなわち join となる：

$$|\phi \lor \psi| = |\phi| \lor |\psi|$$

補題 2.20.

$$\vdash \phi \land \psi \to \phi$$

証明. $\{\phi \land \psi\} \vdash \phi$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\phi \land \psi = \neg(\phi \to \neg\psi) \\
&\neg\phi \to (\phi \to \neg\psi) && \text{(補題 2.15)} \\
&(\neg\phi \to (\phi \to \neg\psi)) \to (\neg(\phi \to \neg\psi) \to \neg\neg\phi) && \text{(補題 2.18)} \\
&\neg(\phi \to \neg\psi) \to \neg\neg\phi && \text{(MP)} \\
&\neg\neg\phi && \text{(MP)} \\
&\neg\neg\phi \to \phi && \text{(補題 2.16)} \\
&\phi && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

$\square$

補題 2.21.

$$\vdash \phi \wedge \psi \to \psi$$

証明. $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \psi$ を示せばよい.

$$
\begin{aligned}
&\phi \wedge \psi = \neg(\phi \to \neg\psi) && \\
&\neg\psi \to (\phi \to \neg\psi) && \text{(L1)} \\
&(\neg\psi \to (\phi \to \neg\psi)) \to (\neg(\phi \to \neg\psi) \to \neg\neg\psi) && \text{(補題 2.18)} \\
&\neg(\phi \to \neg\psi) \to \neg\neg\psi && \text{(MP)} \\
&\neg\neg\psi && \text{(MP)} \\
&\neg\neg\psi \to \psi && \text{(補題 2.16)} \\
&\psi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

□

これら二つの補題から,

$$|\phi \wedge \psi| \leq |\phi| \quad \text{かつ} \quad |\phi \wedge \psi| \leq |\psi|$$

となり, $|\phi \wedge \psi|$ は $\{|\phi|, |\psi|\}$ の下界.

補題 2.22.

$$\{\phi, \psi\} \vdash \phi \wedge \psi$$

証明. MP より $\{\phi, \phi \to \neg\psi\} \vdash \neg\psi$ がわかり, 演繹定理より $\vdash \phi \to ((\phi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$ となる. これより

$$
\begin{aligned}
&\phi \to ((\phi \to \neg\psi) \to \neg\psi) && \\
&\phi && \\
&(\phi \to \neg\psi) \to \neg\psi && \text{(MP)} \\
&((\phi \to \neg\psi) \to \neg\psi) \to (\neg\neg\psi \to \neg(\phi \to \neg\psi)) && \text{(補題 2.18)} \\
&\neg\neg\psi \to \neg(\phi \to \neg\psi) && \text{(MP)} \\
&\psi && \\
&\psi \to \neg\neg\psi && \text{(補題 2.17)} \\
&\neg\neg\psi && \text{(MP)} \\
&\neg(\phi \to \neg\psi) = \phi \wedge \psi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

□

補題 2.23.

$$\{(\chi \to \phi), (\chi \to \psi)\} \vdash \chi \to (\phi \land \psi)$$

証明. $\{(\chi \to \phi), (\chi \to \psi), \chi\} \vdash (\phi \land \psi)$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\chi \to \phi && \\
&\chi \to \psi && \\
&\chi && \\
&\phi && \text{(MP)} \\
&\psi && \text{(MP)} \\
&\phi \land \psi && \text{(補題 2.22)}
\end{aligned}$$

□

これより $|\phi \vee \psi|$ は $\{|\phi|, |\psi|\}$ の最大下界，すなわち meet となる：

$$|\phi \land \psi| = |\phi| \land |\psi|$$

最大元と最小元の存在は次の補題からわかる．

補題 2.24.

$$|\phi| = 1 \Leftrightarrow \vdash \phi$$
$$|\phi| = 0 \Leftrightarrow \vdash \neg\phi$$

証明. $\vdash \phi$ ならば，任意の $\psi \in F$ に対して，L1:$\vdash \phi \to (\psi \to \phi)$ と MP より $\vdash \psi \to \phi$ が得られ，$|\psi| \leq |\phi|$ となる．よって $|\phi|$ は L の最大元である．

$\vdash \neg\phi$ ならば，任意の $\psi \in F$ に対して，補題 2.15:$\vdash \neg\phi \to (\phi \to \psi)$ と MP より $\vdash \phi \to \psi$ が得られ，$|\phi| \leq |\psi|$ となる．よって $|\phi|$ は L の最小元である．

$|\phi| = 1$ ならば，任意の $\psi \in F$ について $|\psi| \leq |\phi|$ である．これより $\vdash \psi \to \phi$ となり，$\vdash \psi$ なる ψ(たとえば axiom) をとれば，MP より $\vdash \phi$ が得られる．

$|\phi| = 0$ ならば，任意の $\psi \in F$ について $|\phi| \leq |\psi|$，すなわち $\vdash \phi \to \psi$ である．これと補題 2.18:$\vdash (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$ から MP より，$\vdash \neg\psi \to \neg\phi$．特に $\vdash \neg\neg\psi \to \neg\phi$ となる．よって $\vdash \psi$ なる ψ をとれば，補題 2.17 と MP より $\vdash \neg\neg\psi$ となり，再び MP より $\vdash \neg\phi$ が得られる． □

したがって L は束をなす．さらに次が言える．

命題 2.25. 束 $L = F/\equiv$ は分配束である．

証明. $|\phi \wedge (\psi \vee \chi)| \leq |(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)|$ を示す．$\mu = (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$ とおく．

補題 2.15 を用いると $\vdash (\phi \vee \psi) \to \mu$ である．補題 2.22 と MP より $\{\phi, \psi\} \vdash \mu$ となり，演繹定理から $\vdash \psi \to (\phi \to \mu)$．同様にして $\vdash \chi \to (\phi \to \mu)$．これらと補題 2.19 より $\vdash \psi \vee \chi \to (\phi \to \mu)$ で，演繹定理から $\{\phi, \psi \vee \chi\} \vdash \mu$．したがって補題 2.20，補題 2.21 より $\{\phi \wedge (\psi \vee \chi)\} \vdash \mu$ を得る． □

命題 2.26. 分配束 L において，$|\neg\phi|$ は $|\phi|$ の補元である．

証明. 補題 2.24 より $\vdash \phi \vee \neg\phi$，$\vdash \neg(\phi \wedge \neg\phi)$ を示せばよい．命題 1.9 より $\vdash \neg\phi \to \neg\phi$ だから $\vdash \phi \vee \neg\phi$ は成立する．

$$\phi \to \neg\neg\phi \qquad \text{(補題 2.17)}$$

$$(\phi \to \neg\neg\phi) \to \neg\neg(\phi \to \neg\neg\phi) \qquad \text{(補題 2.17)}$$

$$\neg\neg(\phi \to \neg\neg\phi) = \neg(\phi \wedge \neg\phi) \qquad \text{(MP)}$$

から $\vdash \neg(\phi \wedge \neg\phi)$ もわかる． □

以上より，L はブール代数となることがわかる．

2.3 付値の空間

意味論的な立場をとると，命題論理に位相空間を見出せる．

$2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れて、コンパクト Hausdorff な位相空間とする．P を命題変数の集合とすると，チコノフの定理より 2 を P の元の数だけ直積した位相空間 2^P もコンパクト Hausdorff 空間となる．付値 v は，もともと写像 $v : P \to 2$ のことであったから，v を 2^P の元 $(v(p))_{p \in P}$ とみなすことで，付値全体と 2^P とを同一視する．

論理式 $\phi \in F$ に対して

$$V_\phi = \{v \in 2^P \mid v(\phi) = 1\}$$

とおく．つまり V_ϕ は $\{\phi\} \subset F$ のモデルの集合である．特にこれは空ではない．

V_ϕ は 2^P の開集合となる．なぜならば，ϕ は命題変数を有限個しか含まないからその有限個の命題変数に対してどう真理値を定めれば良いかをだけを考えると，V_ϕ は積位相の開基の和集合として表せることがわかるからである．

命題 2.27. $\phi, \psi \in F$ に対して

$$\begin{aligned} V_{\neg\phi} &= 2^P \setminus V_\phi \\ V_{\phi\to\psi} &= V_{\neg\phi} \cup (V_\phi \cap V_\psi) \\ V_{\phi\vee\psi} &= V_\phi \cup V_\psi \\ V_{\phi\wedge\psi} &= V_\phi \cap V_\psi \end{aligned}$$

が成立．特に V_ϕ は clopen．また，

$$\vdash \phi \to \psi \implies V_\phi \subset V_\psi$$

が成り立ち，これより写像 $f : L \to \mathrm{clop}(2^P)$ を $f(|\phi|) = V_\phi$ と定めるとこれは well-defined で，Lindenbaum 代数 L から 2^P の clopen 集合全体のなすブール代数へのブール準同型となる．

証明. 容易． □

完全性定理を使えば次のような同型が得られる．

定理 2.28. 上の $f : L \to \mathrm{clop}(2^P)$ 　は全単射，したがって同型.

証明. $|\phi|, |\psi| \in L$ に対して $V_\phi = V_\psi$ とする．このとき，$V_{\phi\vee\neg\psi} = V_\psi \cup V_{\neg\psi} = 2^P$ となり，完全性定理より $\vdash \neg\psi \vee \phi$ すなわち $\vdash \psi \to \phi$ を得る．同様に $\vdash \phi \to \psi$ も得られ，$|\phi| = |\psi|$．よって f は単射．

$V \subset 2^P$ を任意の clopen 集合とする．先の命題より，$\{V_\phi \mid \phi \in F\}$ は 2^P の位相の開基となるので，各 $y \in V$ に対して $y \in V_{\phi_y} \subset V$ なる $\phi_y \in F$ が存在する．$\{V_{\phi_y}\}_{y\in V}$ は V の開被覆で，V はコンパクト (コンパクト空間の閉集合はコンパクト) より，有限部分被覆 $V_{\phi_1}, V_{\phi_2}, \ldots, V_{\phi_n}$ がとれる．$\phi = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \cdots \vee \phi_n \in F$ とおけば，

$$\begin{aligned} f(|\phi|) &= V_{\phi_1\vee\phi_2\vee\cdots\vee\phi_n} \\ &= V_{\phi_1} \cup V_{\phi_2} \cup \cdots \cup V_{\phi_n} = V \end{aligned}$$

となり，全射

よって f はブール同型. □

3 コンパクト性定理の証明

定理 (コンパクト性定理)**.** 論理式からなる集合 Γ がモデルをもつ必要十分条件は，その任意の有限部分集合がモデルをもつことである．

証明. 十分性は明らか．必要性を示す．$\varGamma$ の任意の有限部分集合がモデルをもつとする．付値の空間の閉集合族 $\{V_\phi \mid \phi \in \varGamma\}$ を考える．その中から有限個の閉集合 $V_{\phi_1}, V_{\phi_2}, \ldots, V_{\phi_n}$ を取ってきたとき，集合 $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ は $\varGamma$ の有限部分集合だからモデルをもち，故に $V_{\phi_1} \cap V_{\phi_2} \cap \cdots \cap V_{\phi_n} \neq \emptyset$．したがって $\{V_\phi \mid \phi \in \varGamma\}$ は有限交叉性をもち，付値の空間 2^P のコンパクト性から $\bigcap_{\phi \in \varGamma} V_\phi \neq \emptyset$．よって $\varGamma$ はモデルをもつ． □

証明では明示していないが,

$$
\begin{aligned}
\varGamma \text{ がモデルをもつ} &\iff {}^{\exists} v \in 2^P, \quad {}^{\forall}\phi \in \varGamma, \quad v(\phi) = 1 \\
&\iff {}^{\exists} v \in 2^P, \quad {}^{\forall}\phi \in \varGamma, \quad v \in V_\phi \\
&\iff {}^{\exists} v \in 2^P, \quad v \in \bigcap_{\phi \in \varGamma} V_\phi \\
&\iff \bigcap_{\phi \in \varGamma} V_\phi \neq \emptyset \\
&\iff \{V_\phi\}_{\phi \in \varGamma} \text{ が交叉する}
\end{aligned}
$$

であり，同型 $L \cong \mathrm{clop}(2^P)$ を通じてモデルの存在と閉集合の交叉性が対応している．

すなわちコンパクト性定理とは，付値の空間がコンパクトであるということに他ならない.

4　おわりに

論理には意味論と構文論という二つの立場があることを紹介した．意味論の立場から付値の空間を得て，構文論の立場から Lindenbaum 代数を得たことを思い返せば，これら二つの立場は論理の空間的側面と代数的側面であるといえる．意味論と構文論の等価性を保証する健全性定理と完全性定理は，適当なクラスの空間と代数との間にある種の同等性があることを示唆する．

完全性定理の帰結として 2.3 節の同型が存在することがわかった．この同型は，ストーンの表現定理の一例であり，これはブール代数の圏とストーン空間の圏との間の反変圏同値であるストーン双対性へと昇華する．二つの立場の等価性には確かに，代数と幾何の間の双対性が裏に潜んでいたのである．

参考文献

[1] 田中俊一,『位相と論理』，日本評論社，2000 年.

[2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald (新妻弘 訳),『可換代数入門』，共立出版，2006 年.

[3] 檜山正幸，ブログ『檜山正幸のキマイラ飼育記』.

- 2005-11-29 記事『イデアルと論理 番外の補足:ベキ等元と連結性』. http://d.hatena.ne.jp/m-hiyama/20051129/1133252413.
- 2005-12-07 記事『コンパクト空間と論理／モデル論』. http://d.hatena.ne.jp/m-hiyama/20051207/1133937746.
- 2006-10-28 記事『古典論理は可換環論なんだよ』. http://d.hatena.ne.jp/m-hiyama/20061028/1162014043.

[4] Sokrates=Chaos，ブログ『Sokrates さんの備忘録ないし雑記帳』.

- 2016-02-22 記事『コンパクト性定理と Tychonoff の定理』. http://sokrates7chaos.hatenablog.com/entry/2016/02/22/014627.

[5] 藤田博司，『命題論理と素イデアル定理』，第一回関西すうがく徒のつどい講演資料，2012 年. http://tenasaku.com/academia/notes/fujita-kwansai-math-notes.pdf.

[6] 丸山善宏,『圏論的双対性の「論理」: 圏論における抽象と捨象、あるいは不条理』（数学セミナー（５月号）），2012 年.

このノートはほとんど [1] のまとめ．詳しくは [1] を参照されたい (現在絶版となっているのが悔しいことである)．ここに書いてあるコンパクト性定理の証明は簡潔であるが，数理論理学の言葉だけで証明しようとするとかなり面倒なものになるらしく ([5] 参照)，他の世界 (圏) を経由することでうまく証明できることが伝わればと思う．

数理論理学について，普通の数学違うだとか，他の数学とは離れているだとか，そのような感想を抱いている人もいるかもしれない．しかし，今みたように数理論理学も他の分野と活発に交流しており，数学の世界の中で独立しているわけではない．藤田博司さんは,「数理論理学は数学の論理構造の分析を目的とした論理学の分野として出発したが，それを数学に先立って数学の基礎づけをする営みと考えるよりも，数学全体のなかにあって他領域と interact する一領域と考えるほうが実り多いだろうと，筆者は考える.」([5] より引用) と述べているが，全くその通りと感じた．決して特別な分野ではなく歴とした数学全体の中の一分野であり，何も気構えることはないのだと私は思う．