# Gelfand-Shilov の定理

paper3510mm

平成 30 年 6 月 30 日

この pdf は Gelfand-Shilov の定理（2.1）の証明をまとめたもの。定理の名前は、黒川さんと小島さんの対談をまとめた『21 世紀の新しい数学』（[2]）から。しかしこの名称は一般的ではない模様（主張がよく知られた事実なので）ゆえ注意してほしい[1]。（この pdf の内容はアティマク一章演習問題 26 の解答にもなろう。）

## 1 Introduction

目標となる主定理は、いわゆるコンパクト Hausdorff 空間の復元定理である。

空間を調べるのに、その上の関数たちを調べることで元の空間を知ろうとする発想は、数学ではあちこちで見かける。例えば、位相空間 $X$ に対して、複素数値の連続関数の集合

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : \text{cont.}\}$$

は、各点ごとに和と積を定めることによって、単位元をもつ可換環となる。位相空間 $X$ の位相的性質は、この環 $C(X)$ の環論的な性質に豊富に解釈される。例えば、$X$ が連結である場合、このことは $C(X)$ に非自明なベキ等元 (idempotent) が存在しないことと同値になる[2]。特に良い場合、位相空間の情報は関数環へ完全に反映され、位相空間は関数環から再現されさえするのである。

## 2 主定理とその証明

> **定理 2.1** (Gelfand-Shilov)**.** 任意のコンパクト Hausdorff 空間 $X$ は、その $\mathbb{C}$ 値連続関数環 $C(X)$ の極大スペクトラムによって復元される。すなわち位相同型
>
> $$X \cong \operatorname{mSpec} C(X)$$
>
> が存在する。

[1] 原論文は [3] と思われる。

[2] 定数でない $f \in C(X)$ で $f^2 = f$ をみたすものが存在すれば、各点 $x \in X$ について $f(x) = 0$ または $f(x) = 1$ となり、$X_0 = f^{-1}(0)$、$X_1 = f^{-1}(1)$ とおけば、$X = X_0 \cup X_1$ と表せ連結でないことがわかる。逆は明らか。

ここで $\mathrm{mSpec}\, C(X)$ は、$C(X)$ の極大イデアルの集合に、$\mathrm{Spec}\, C(X)$ の Zariski 位相からの相対位相をいれた位相空間を表す。つまり、イデアル $I \subset C(X)$ に対して

$$V(I) = \{m \subset C(X) : \text{maximal} \mid I \subset m\}$$

とおくとき、$\{V(I)\}$ を閉集合系とする位相をいれる。

**証明.** まず、写像 $\Phi : X \to \mathrm{mSpec}\, C(X)$ を構成する。$x \in X$ に対して

$$m_x = \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$$

とおく。評価関数 (evaluation function) $\mathrm{ev}_x : C(X) \to \mathbb{C}$ を $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ により定めると、$\mathrm{ev}_x$ は全射環準同型となる。すると $m_x = \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_x)$ であり、準同型定理から

$$C(X)/m_x \cong \mathbb{C}$$

となり $m_x$ は極大イデアルである。そこで $\Phi(x) = m_x$ と定める。

次に、$\Phi$ の単射性を確認する。今、$X$ はコンパクト Hausdorff であるから正規。よって Urysohn の補題[3]から、$x \neq y$ なる $x, y \in X$ に対して、

$$\exists f \in C(X), \quad f(x) = 0, f(y) \neq 0$$

$$\therefore\ f \in m_x, f \notin m_y$$

となり、$\Phi(x) = m_x \neq m_y = \Phi(y)$。したがって単射。

それから、$\Phi$ は次のようにして全射であるとわかる。任意の極大イデアル $m \subset C(X)$ をとり

$$Z = \{x \in X \mid \forall f \in m, f(x) = 0\}$$

とおく。もし $Z \neq \emptyset$ であれば、元 $x \in Z$ がとれて

$$\forall f \in m, f(x) = 0 \text{ i.e. } f \in m_x$$

$$\therefore m \subset m_x$$

これと $m$ の極大性から、$m = m_x = \Phi(x)$ となり $\Phi$ の全射性がわかる。さて、$Z \neq \emptyset$ を示そう。$Z = \emptyset$ だと仮定すると

$$\forall x \in X, \quad \exists f_x \in m, \quad f_x(x) \neq 0$$

$f_x$ は連続だから、$U_x = f_x^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ は $x$ の開近傍で、$f_x(U_x) \not\ni 0$ である。$\{U_x\}_{x \in X}$ は $X$ の開被覆となるが、$X$ はコンパクトより

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in X, \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

[3]正規空間 $X$ の交わりのない二つの閉集合 $A, B \subset X$ に対して、ある連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在して $f(X) \subset [0,1], f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$ となる。特に、異なる二点は連続関数で分離可能。

そこで、

$$\begin{aligned} f &= |f_{x_1}|^2 + \cdots + |f_{x_n}|^2 \\ &= \overline{f_{x_1}} f_{x_1} + \cdots + \overline{f_{x_n}} f_{x_n} \end{aligned}$$

とおくと $f_{x_i} \in m$ より $f \in m$ となり、明らかに各 $x \in X$ で $f(x) \neq 0$ である。よって $f \in m$ は逆元 $1/f \in C(X)$ をもち、$m = (1)$。しかしこれは $m$ が極大イデアルであることに矛盾。したがって $Z \neq \emptyset$ となり $\Phi$ は全射。

最後に、$\Phi$ が位相同型を与えることを示す。任意の $\mathrm{mSpec}\, C(X)$ の閉集合 $V(I)$（$I$ は $C(X)$ のイデアル）に対し、

$$K_I = \{x \in X \mid I \subset m_x\}$$

とおくと

$$\begin{aligned} K_I^c &= \{x \in X \mid I \not\subset m_x\} \\ &= \{x \in X \mid \exists f \in I, f \notin m_x\} \\ &= \{x \in X \mid \exists f \in I, f(x) \neq 0\} \\ &= \bigcup_{f \in I} f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) : \text{open} \end{aligned}$$

より $K_I$ は閉集合で、

$$\begin{aligned} x \in \Phi^{-1}(V(I)) &\Leftrightarrow \Phi(x) = m_x \in V(I) \\ &\Leftrightarrow I \subset m_x \\ &\Leftrightarrow x \in K_I \\ \therefore \Phi^{-1}(V(I)) &= K_I \end{aligned}$$

また、任意の $X$ の閉集合 $K$ に対し、

$$I_K = \{f \in C(X) \mid \forall a \in K, f(a) = 0\}$$

とおくと、$I_K$ は $C(X)$ のイデアルで

$$\begin{aligned} m_a \in \Phi(K) &\Leftrightarrow a \in K \\ &\Leftrightarrow \forall f \in C(X), \quad \text{"}\forall a' \in K, f(a') = 0 \Rightarrow f(a) = 0\text{"} \\ &\Leftrightarrow I_K \subset m_a \\ &\Leftrightarrow m_a \in V(I_K) \\ \therefore \Phi(K) &= V(I_K) \end{aligned}$$

ただし二つ目の $\Leftrightarrow$ で Urysohn の補題を用いた。以上で $\Phi$ は同相であることがわかる。 $\square$

なお、$C(X)$ の元は複素数値としたが、実数値連続関数を用いても同じ結果が得られる。
この定理から次の系が導かれる。

> **系 2.2.** コンパクト Hausdorff 空間 $X, Y$ に対し、$C(X) \cong C(Y)$（環同型）ならば $X \cong Y$（同相）である。

## 3 Consideration

mSpec $C(X)$ とかいたが、これは次のように $C(X)$ 上の準同型の集合と対応する[4]:

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{mSpec}(C(X)) & \cong & \mathrm{Hom}(C(X), \mathbb{C}) & = \{C(X) \to \mathbb{C} : \text{hom.}\} \\ \mathrm{Ker}\, f & \longleftarrow\!\shortmid & f : C(X) \to \mathbb{C} & \end{array}$$

そこで $C(X) = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{C})$ とかけば、主定理は

$$X \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$$

と表せる。
体 $k$ 上の有限次元線形空間 $V$ について、その双対空間 $V^*$ は

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$$

であり、二重双対が元の線形空間と自然に同型 $V \cong V^{**}$ だったことを思い出せば、$C(X)$ は $X$ の双対とみることができ主定理は、コンパクト Hausdorff 空間 $X$ の二回双対をとると元の空間と同型となる、と標語的に言い表せる。ただし、無限次元線形空間 $V$ では $V \ncong V^{**}$ となるように、一般の位相空間 $X$ で成り立つわけではない。

上の表現で複素数の集合 $\mathbb{C}$ が二回現れていることがわかる。一つ目は位相空間としての $\mathbb{C}$ であり、二つ目は可換環としての $\mathbb{C}$ である。$\mathbb{C}$ への射全体を考えればうまく空間が復元できるということだが、何故 $\mathbb{C}$ なのか。$\mathbb{C}$ は数学において基本的な対象であることは皆の了解を得られることであろうが、$\mathbb{C}$ が基本的だからという理由はこの疑問を解消するには不十分な気がする。$\mathbb{C}$ のなにが基本的か、どういう点が基本的なのか。位相空間と可換環と二つの側面を見せる対象であることは、何かしら関係しそうではあるが、よくわからない。また、なぜ Hum-set は双対になるのか。一般に Spec は Hom-set として表せないことから、Hom-set は双対概念の一形態にすぎないようにも感じる。では、双対とはいったい何か。謎は深まるばかりである。

---

[4]逆向きの対応は、$m_x \in \mathrm{mSpec}\, C(X)$ に対して $\mathrm{ev}_x : C(X) \to \mathbb{C}$ を得る対応。

# 参考文献

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald (新妻 弘 訳)、『Atiyah- MacDonald 可換代数入門』、共立出版、2006。

[2] 黒川重信・小島寛之、『21 世紀の新しい数学 〜絶対数学、リーマン予想、そしてこれからの数学』、技術評論社。

[3] I. Gelfand, G. E. Šilov, " Über verschiedene Methoden der EinfÌĹührung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes ", Матем. сб., **9(51)**:1 (1941), 25âĂŞ39

[4] Qiaochu Yuan's blog "Annoying Precision". The article "Spectra of rings of continuous functions", November 24, 2009. https://qchu.wordpress.com/2009/11/24/spectra-of-rings-of-continuous-functions/