ネーター空間の有限直積はネーター空間である

@paper3510mm

平成 30 年 1 月 10 日

ネットによるネーター空間の特徴づけを紹介し，ネーター位相空間の有限個の直積，特に二つのネーター空間の直積はまたネーター位相空間であることを示す．

1　ネット

定義 1.1. 集合 I 上の二項関係 $\leq$ が，反射的 ($i \leq i$) かつ推移的 ($i \leq j, j \leq k \Rightarrow i \leq k$) のとき，quasi-ordeer(あるいは preorder) という．

　空でない集合 I 上の quasi-order $\leq$ が有向性：

$$\forall a, b \in I, \quad \exists c \in I, \quad a \leq c, b \leq c$$

をもつとき，$(I, \leq)$ は有向集合 (directed set) であるという．

定義 1.2 (net)**.** X を集合とする．有向集合 $(I, \leq)$ に対して，写像 $I \to X$ を X 上のネット (net) という．$i \in I$ の像を $x_i \in X$ と表し，$(x_i)_{i \in I}$ が X 上のネットであると表現することにする．

　部分集合 $A \subset X$ に対して，ネット $(x_i)_{i \in I}$ が eventually in A であるとは

$$\exists i \in I, \quad \forall i' \geq i, \quad x_{i'} \in A$$

のときをいう．

定義 1.3 (subnet)**.** $(x_i)_{i \in I}$ を net とする．有向集合 J と写像 $\alpha : J \to I$ が

$$\text{monotone} : j \leq j' \Rightarrow \alpha(j) \leq \alpha(j')$$
$$\text{cofinal} : \forall i \in I, \quad \exists j \in J, \quad i \leq \alpha(j)$$

をみたすとき，$(x_{\alpha(j)})_{j \in J}$ は $(x_i)_{i \in I}$ の部分ネット (subnet) という．

定義 1.4 (ultranet)**.** 集合 X 上の net $(x_i)_{i\in I}$ が ultranet であるとは，任意の部分集合 $A \subset X$ について $(x_i)_{i\in I}$ が eventually in A であるか，または eventually in A^c であるときをいう．

定義 1.5 (filter,ultrafilter)**.** X を集合，$\mathcal{P}(X)$ をそのベキ集合とする．空でない $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ が

$$A \subset B, A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F}$$
$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

をみたすときフィルター (filter) であるという．さらに真のフィルター $\mathcal{F}$ が

$$\forall A \subset X, \quad A \in \mathcal{F} \text{ または } A^c \in \mathcal{F}$$

をみたすとき ultrafilter であるという．

$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して

$$\uparrow \mathcal{B} := \{A \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}, \quad B \subset A\}$$

と定める．

定義 1.6 (filter basis)**.** 空でない $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ が

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \quad \exists A \in \mathcal{B}, \quad A \subset B_1 \cap B_2$$

をみたすとき，filter basis という．このとき $\mathcal{F} = \uparrow \mathcal{B}$ は filter をなし，$\mathcal{B}$ によって生成されるフィルター (filter generated by $\mathcal{B}$) であるという．特に $\emptyset \notin \mathcal{F}$ である必要十分条件は $\emptyset \notin \mathcal{B}$ である．

定理 1.7 (Kelly's theorem)**.** 任意の net は ultranet である subnet をもつ．

証明. $(x_i)_{i\in I}$ を X 上の任意の net とする．$i \in I$ に対し $s_i = \{x_{i'} \in X \mid i \leq i'\}$ とし (i の section という)，

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{\alpha=1}^{n} s_{i_\alpha} \mid n \in \mathbb{N}, i_\alpha \in I \right\}$$

とおくとこれは空でない．$\bigcap_{\alpha=1}^{n} s_{i_\alpha}, \bigcap_{\beta=1}^{m} s_{i_\beta} \in \mathcal{B}$ に対して $\left(\bigcap_{\alpha=1}^{n} s_{i_\alpha}\right) \cap \left(\bigcap_{\beta=1}^{m} s_{i_\beta}\right) \in \mathcal{B}$ であるから，$\mathcal{B}$ は filter basis．よって

$$\mathcal{F}_0 = \uparrow \mathcal{B}$$

は X 上の filter である．ここで任意の $\bigcap_{\alpha=1}^{n} s_{i_\alpha} \in \mathcal{B}$ 対して，I は有向性をもつことから $i_1, \ldots, i_n \leq i$ なる $i \in I$ が存在し，このとき $x_i \in \bigcap_{\alpha=1}^{n} s_{i_\alpha}$ となり $\bigcap_{\alpha=1}^{n} s_{i_\alpha} \neq \emptyset$ である．よって $\emptyset \notin \mathcal{B}$，故に $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$ である．

$$\Sigma = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) : \text{filter} \mid \emptyset \notin \mathcal{F} \text{ かつ } \forall i \in I, s_i \in \mathcal{F}\}$$

とおくとき，$\mathcal{F}_0 \in \Sigma$ より $\Sigma \neq \emptyset$ である．

$\Sigma' \subset \Sigma$ を全順序部分集合とする．$\mathcal{F}_1 = \bigcup_{\mathcal{F} \in \Sigma'} \mathcal{F}$ とおく．まず $\mathcal{F}_1$ が filter であることを示す．$A \subset B, A \in \mathcal{F}_1$ とすると，$A \in \mathcal{F}$ なる $\mathcal{F} \in \Sigma'$ が存在する．$\mathcal{F}$ は filter より $B \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ となる．$A, B \in \mathcal{F}_1$ とすると，$A \in \mathcal{F}_2$ なる $\mathcal{F}_2 \in \Sigma'$ と $B \in \mathcal{F}_3$ なる $\mathcal{F}_3 \in \Sigma'$ が存在する．Σ' は全順序だから，例えば $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$ とすれば，$A, B \in \mathcal{F}_3$ であり，$\mathcal{F}_3$ は filter より $A \cap B \in \mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_1$ となる．よって $\mathcal{F}_1$ は filter である．

明らかに $\emptyset \notin \mathcal{F}_1$，$\forall i \in I, s_i \in \mathcal{F}_1$ だから，$\mathcal{F}_1 \in \Sigma$．よって $\mathcal{F}_1$ は Σ' の上界である．したがって Zorn の補題より，Σ は極大元 $\mathcal{F}'$ をもつ．

この $\mathcal{F}'$ が ultrafilter であることを示そう．$\mathcal{F}'$ は ultrafilter でないと仮定する．するとある $A \subset X$ が存在して $A \notin \mathcal{F}'$ かつ $A^c \notin \mathcal{F}'$ となる．このとき $C = \mathcal{F}' \cup \{A\} \cup \{V \cap A \mid V \in \mathcal{F}'\}$ で生成される filter は $\mathcal{F}'$ を真に包み，すべての $s_i (i \in I)$ を含む．したがって $\mathcal{F}'$ の極大性からこの filter は $\emptyset$ を含む．よって

$$\exists V \in \mathcal{F}', \quad V \cap A = \emptyset.$$

同様に考えて，

$$\exists U \in \mathcal{F}', \quad U \cap A^c = \emptyset.$$

このとき，

$$(V \cap U) \cap A = \emptyset, \quad (V \cap U) \cap A^c = \emptyset.$$

$$\therefore V \cap U = \emptyset.$$

となるが，$\mathcal{F}'$ は filter より $\emptyset = V \cap U \in \mathcal{F}'$ となり，$\emptyset \notin \mathcal{F}'$ に矛盾．したがって $\mathcal{F}'$ は ultrafilter である．

さて

$$J = \{(i, E) \in I \times \mathcal{F}' \mid x_i \in E\}$$

とおき，

$$(i, E) \leq (i', E') \Leftrightarrow i \leq i' \text{ かつ } E \supset E'$$

によって quasi-order を入れる．このとき J が有向集合であることを示す．$(i, E), (i', E') \in J$ とすると，I は有向集合だから $i, i' \leq i_1$ なる $i_1 \in I$ がとれる．$E'' = E \cap E'$ とおくと $E'' \in \mathcal{F}'$．さらに $\mathcal{F}'$ の定義から $s_{i_1} \in \mathcal{F}'$ なので，$E'' \cap s_{i_1} \in \mathcal{F}'$．$\mathcal{F}'$ は空集合を

含まないから $E'' \cap s_{i_1} \neq \emptyset$ であり，よって $x_{i''} \in E'' \cap s_{i_1} (i_1 \leq i'')$ がとれて，このとき $(i'', E'') \in J$ となる．また

$$i \leq i_1 \leq i'', E \supset E \cap E' = E'' \quad \text{かつ} \quad i' \leq i_1 \leq i'', E' \supset E \cap E' = E''$$

$$\therefore (i, E) \leq (i'', E'') \quad \text{かつ} \quad (i', E') \leq (i'', E'')$$

だから，J は有向集合である．

写像 $\alpha : J \to I$ を $\alpha(i, E) = i$ で定めると，α:monotone．$i \in I$ に対し，$x_i \in s_i \in \mathcal{F}'$ より $(i, s_i) \in J$ で，$\alpha(i, s_i) = i$ より α は全射，特に α:cofinal．よって，$(x_{\alpha(i,E)})_{(i,E)\in J}$ は $(x_i)_{i\in I}$ の subnet となる．

最後に $(x_{\alpha(i,E)})_{(i,E)\in J}$ が ultranet であることを示そう．部分集合 $A \subset X$ を任意にとる．$A \in \mathcal{F}'$ だとする．$i_0 \in I$ を一つとる．このとき $s_{i_0} \in \mathcal{F}'$ だから $A \cap s_{i_0} \in \mathcal{F}'$ となり $A \cap s_{i_0} \neq \emptyset$．よって $x_i \in A \cap s_{i_0}$ なる $i \geq i_0$ がとれ，$(i, A) \in J$ となる．$(i, A) \leq (i', E')$ なる任意の $(i', E') \in J$ に対し，$x_{\alpha(i',E')} = x_{i'} \in E' \subset A$ である．したがって $(x_{\alpha(i,E)})_{(i,E)\in J}$ は eventually in A となる．一方で，$A \notin \mathcal{F}'$ だとすると，$\mathcal{F}'$ は ultrafilter より $A^c \in \mathcal{F}'$ であるから，上と同じ議論により，$(x_{\alpha(i,E)})_{(i,E)\in J}$ は eventually in A^c となる．

以上より $(x_{\alpha(i,E)})_{(i,E)\in J}$ は ultranet である $(x_i)_{i\in I}$ の subnet である． □

前半部分は任意の filter に対してそれを含む ultrafilter が存在することの証明そのままである．

2 ネットの収束と収積点

定義 2.1 (convergence)**.** X を位相空間とする．$x \in X$ の開近傍全体の集合を $\mathcal{N}(x)$ とする．X 上のネット $(x_i)_{i\in I}$ が x に収束する (converge to x) とは，

$$\forall U \in \mathcal{N}(x), \quad \exists i \in I, \quad \forall i' \geq i, \quad x_{i'} \in U$$

であるときをいう．このとき x は $(x_i)_{i\in I}$ の limit であるともいう．

定義 2.2 (cluster point)**.** X を位相空間，$(x_i)_{i\in I}$ を X 上のネットとする．$x \in X$ が $(x_i)_{i\in I}$ の収積点 (cluster point) であるとは，$(x_i)_{i\in I}$ が x に収束する部分ネットをもつときをいう．

x が $(x_i)_{i\in I}$ の limit ならば cluster point である．

次の命題は cluster point の特徴づけを与える．

命題 2.3. X を位相空間，$x \in X$ をその点，$(x_i)_{i\in I}$ を X 上のネットとする．このとき，x が $(x_i)_{i\in I}$ の cluster point である必要十分条件は

$$\forall U \in \mathcal{N}(x), \quad \forall i \in I, \quad \exists i' \in I, \quad i \leq i', x_{i'} \in U$$

である．

証明. 必要性：$(x_{\alpha(j)})_{j\in J}$ を x に収束する $(x_i)_{i\in I}$ の subnet とする．任意の x の開近傍 U と任意の $i \in I$ に対して，$(x_{\alpha(j)})_{j\in J}$ を x に収束するから，

$$\exists j_0 \in J, \quad \forall j' \geq j_0, \quad x_{\alpha(j')} \in U.$$

α:cofinal より

$$\exists j_1 \in J, \quad i \leq \alpha(j_1).$$

J は有向だから，$j_0 \leq j, j_1 \leq j$ なる $j \in J$ が存在して，このとき $i \leq \alpha(j), x_{\alpha(j)} \in U$ となる．

十分性：$J = \{(i, U) \in I \times \mathcal{N}(x) \mid x_i \in U\}$ とおき

$$(i_1, U_1) \leq (i_2, U_2) \Leftrightarrow i_1 \leq i_2 \text{ かつ } U_1 \supset U_2$$

によって quasi-order をいれる．このとき J は有向集合である．なぜなら，$(i_1, U_1), (i_2, U_2) \in J$ に対し，I は有向より $i_1, i_2 \leq i'$ なる $i' \in I$ がとれる．$U_3 = U_1 \cap U_2$ とおくと，$x \in U_3$ だから仮定より

$$\exists i_3 \in I, \quad i' \leq i_3, x_{i_3} \in U_3$$

となる．よって $(i_3, U_3) \in J$ で，

$$(i_1, U_1) \leq (i_3, U_3), \quad (i_2, U_2) \leq (i_3, U_3)$$

であるから，J は有向集合である．

写像 $\alpha : J \to I$ を $\alpha(i, U) = i$ で定めると，α:monotone で，さらに仮定より α:cofinal．よって $(x_{\alpha(i,U)})_{(i,U)\in J}$ は $(x_i)_{i\in I}$ の subnet である．

任意の x の開近傍 U' をとる．すると仮定から $x_{i'} \in U'$ なる $i' \in I$ が存在し，このとき $(i', U') \in J$．$(i, U) \geq (i', U')$ ならば，$x_i \in U$ で $i' \leq i$ かつ $U' \supset U$ より，$x_{\alpha(i,U)} = x_i \in U \subset U'$ となる．よって $(x_{\alpha(i,U)})_{(i,U)\in J}$ は x に収束する． □

この条件を cluster point の定義とすることも多い．

limit は cluster point であるが，ultranet においては逆も成り立つ：

> **補題 2.4.** 位相空間 X 上の ultranet $(x_i)_{i\in I}$ において，$x \in X$ がその limit であることとその cluster point であることは同値．

証明. 必要性は明らか．十分性を示す．U を x の開近傍とする．$(x_i)_{i\in I}$ は ultranet より

$$(x_i)_{i\in I} : \text{eventually in } U \quad \text{または} \quad (x_i)_{i\in I} : \text{eventually in } U^c.$$

後者であるとすると，

$$\exists i_1 \in I, \quad \forall i \geq i_1, \quad x_i \in U^c$$

であるが，x は cluster point より

$$\exists i_2 \in I, \quad i_1 \leq i_2, x_{i_2} \in U$$

だからこれは矛盾．よって $(x_i)_{i\in I}$: eventually in U．U は任意より x は limit である． □

次にコンパクト性の net の cluster point による特徴づけを与える．

> **命題 2.5.** 位相空間 X において，$K \subset X$ がコンパクトであることと，K の任意の net $(x_i)_{i\in I}$ が K 内に cluster point をもつことは同値.

証明. 必要性 : $K \subset X$ はコンパクトであるとする．K 内に cluster point をもたない K 上の net $(x_i)_{i\in I}$ が存在すると仮定する．各 $x \in K$ は $(x_i)_{i\in I}$ の cluster point ではないから，

$$\exists U_x \in \mathcal{N}(x), \quad \exists i_x \in I, \quad \forall j \geq i_x, \quad x_j \notin U_x$$

となる．$\{U_x\}_{x\in K}$ は K の開被覆をなし，K:コンパクトより

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in K, \quad K \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$$

となる．I の有向性より $i_{x_1}, \ldots, i_{x_n} \leq i$ なる $i \in I$ がとれて，このとき

$$x_i \notin U_{x_1}, \ldots, x_i \notin U_{x_n}$$

となり，これは $x_i \in K$ に矛盾する．よって K の任意の net は K 内に cluster point をもつ．

十分性 : K の任意の net $(x_i)_{i\in I}$ が K 内に cluster point をもつとする．K がコンパクトでないと仮定する．$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の開被覆とし，$\mathcal{U} = \{U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$ に包含順序をいれて有向集合とする．K はコンパクトでないから，各 $A \in \mathcal{U}$ について $K \not\subset A$ となり，$x_A \notin A$ なる $x_A \in K$ がとれる．このとき $(x_A)_{A\in\mathcal{U}}$ は K の net であり，ある $x \in K$ を cluster point をもつ．$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は K の開被覆だったから，$x \in U_\lambda$ なる $\lambda \in \Lambda$ をとると，$U_\lambda \in \mathcal{U}$ であることと x が $(x_A)_{A\in\mathcal{U}}$ の cluster point であることから，

$$\exists A \in \mathcal{U}, \quad U_\lambda \subset A, x_A \in U_\lambda$$

これは $x_A \notin A$ に矛盾．したがって K はコンパクト． □

3 ネーター空間

> **定義 3.1** (noetherian space)**.** 位相空間 X について，その任意の部分集合がコンパクトであるとき，ネーター空間 (noetherian space) であるという．

命題 3.2. 位相空間 X に対して，X がネーター空間であることと，任意の net $(x_i)_{i\in I}$ がある $x_{i_0}(i_0 \in I)$ を cluster point にもつことは同値.

証明. 必要性：$K = \{x_i \mid i \in I\}$ とおくと，X はネーター空間より K はコンパクトだから，$(x_i)_{i\in I}$ を K 上の net と思えばこれは K 内に cluster point をもつ．つまり，$(x_i)_{i\in I}$ はある $x_{i_0}(i_0 \in I)$ を cluster point にもつ.

十分性：$K \subset X$ を任意の部分集合とする．K 上の net $(x_i)_{i\in I}$ を任意にとると，X 上の net と思えば，ある $x_{i_0}(i_0 \in I)$ を cluster point にもつ．$x_{i_0} \in K$ であることから，K はコンパクト. □

定義 3.3 (self-convergence)**.** 位相空間 X 上の net $(x_i)_{i\in I}$ が self-convergent であるとは，$(x_i)_{i\in I}$ が各 x_i に収束するときをいう.

定理 3.4. 位相空間 X に対して，X がネーター空間であることと，任意の net が self-convergent な subnet をもつことは同値.

証明. 必要性:X 上の net $(x_i)_{i\in I}$ に対して，まず $J = \{i \in I \mid x_i \text{は} (x_i)_{i\in I} \text{の cluster point}\}$ とおく．先の命題から $J \neq \emptyset$．J は有向集合であり，$J \hookrightarrow I$ は cofinal であることを示そう．$i_1, i_2 \in J \subset I$ に対し，$I' = \{i \in I \mid i_1, i_2 \leq i\}$ とおくとこれは有向集合で $(x_{i'})_{i'\in I'}$ は X 上の net．再び先の命題からこれはある $x_{i_0}(i_0 \in I')$ を cluster point にもつ．x_{i_0} は $(x_i)_{i\in I}$ の cluster point でもあるから $i_0 \in J$．よって J は有向集合．同じ議論によって $J \hookrightarrow I$ は cofinal となる．このことから，$(x_j)_{j\in J}$ は $(x_i)_{i\in I}$ の subnet であるということがわかる.

$(x_i)_{i\in I}$ が ultranet である場合，前節の補題より，$(x_i)_{i\in I}$ は $x_j (j \in J)$ に収束する．J:cofinal より $(x_j)_{j\in J}$ も x_j に収束し，self-convergent である．よって $(x_i)_{i\in I}$ は self-convergent な subnet をもつ.

一般の net $(x_i)_{i\in I}$ の場合，Kelly の定理より ultranet である subnet が存在．よってこの subnet はさらに self-convergent な subnet をもつから，$(x_i)_{i\in I}$ も self-convergent な subnet をもつ.

十分性：任意の net $(x_i)_{i\in I}$ に対し，これは self-convergent な subnet をもつから，特にある x_{i_0} を cluster point にもつ．よって先の命題より，X はネーター空間である. □

定理 3.5. X, Y がネーター空間なら，$X \times Y$ もネーター空間である.

証明. $(x_i, y_i)_{i\in I}$ を $X \times Y$ 上の net とする．X 上の net $(x_i)_{i\in I}$ に対し，X:noetherian より self-convergent subnet $(x_{\alpha(j)})_{j\in J}$ がとれる．さらに Y 上の net $(y_{\alpha(j)})_{j\in J}$ に対し，Y:noetherian より self-convergent subnet $(y_{\alpha(\beta(k))})_{k\in K}$ がとれる．このとき $(x_{\alpha\circ\beta(k)}, y_{\alpha\circ\beta(k)})_{k\in K}$ は self-conbergent であることを示そう．$(x_{\alpha\circ\beta(k')}, y_{\alpha\circ\beta(k')})(k' \in K)$ を任意に固定する．$(x_{\alpha\circ\beta(k')}, y_{\alpha\circ\beta(k')}) \in X \times Y$ の開近傍 W に対し，

$$\exists U \subset X\text{:open}, \quad \exists V \subset Y\text{:open}, \quad (x_{\alpha\circ\beta(k')}, y_{\alpha\circ\beta(k')}) \in U \times V \subset W$$

である．$(x_{\alpha(j)})_{j\in J}$ は $x_{\alpha\circ\beta(k')}$ に収束するから，

$$\exists j_0 \in J, \quad \forall j \geq j_0, \quad x_{\alpha(j)} \in U$$

となる．$(y_{\alpha\circ\beta(k)})_{k\in K}$ は $y_{\alpha\circ\beta(k')}$ に収束するから，

$$\exists k_0 \in K, \quad \forall k \geq k_0, \quad y_{\alpha\circ\beta(k)} \in V$$

となる．$\beta : K \to J$ は cofinal から

$$\exists k_1 \in K, \quad j_0 \leq \beta(k_1)$$

であり，K の有向性から

$$\exists k_2 \in K, \quad k_0 \leq k_2, k_1 \leq k_2$$

である．このとき任意の $k \geq k_2$ に対して $(x_{\alpha\circ\beta(k)}, y_{\alpha\circ\beta(k)}) \in U \times V$ となっている．よって，$(x_{\alpha\circ\beta(k)}, y_{\alpha\circ\beta(k)})_{k\in K}$ は $(x_{\alpha\circ\beta(k')}, y_{\alpha\circ\beta(k')})$ に収束する．$k' \in K$ の固定を外せば，self-convergence がわかる．

したがって $X \times Y$ の任意の net が self-convergent subnet をもち，$X \times Y$ はネーター空間となる． □

参考文献

[1] Jean Goubault-Larrecq. 2016. *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory: Selected Topics in Point-Set Topology*. Cambridge University Press, New York, NY, USA.

[2] Jean Goubault-Larrecq, *On Noetherian Spaces*, `http://www.lsv.fr/Publis/PAPERS/PDF/JGL-lics07.pdf`, 2007.

[3] Jean Goubault-Larrecq, *Noetherian Spaces*, `http://www.lsv.fr/~goubault/ccc14.pdf`, 2014.

[4] Jean Goubault-Larrecq, *A few things on Noetherian spaces*, `http://www.lsv.fr/~goubault/SummerTopologyConference2016/noetherian.pdf`, 2016.

[5] Henno Brandsma, *Nets, cluster points and the Tychonoff theorem* , `http://at.yorku.ca/p/a/c/a/13.pdf`, 2003.