アファインスキームの構造層について

@paper3510mm *

2019 年 2 月 9 日

概要

Hartshorne [Har77] による，アファインスキームの構造層の定義は，どうも自然には見えない．この記事では，Spec(A) 上に層を自然に構成し，それが [Har77] での定義と一致することを確認する．

0　初めに

Hartshorne による "Algebraic Geometry"[Har77] は，スキーム論を学ぶための入門書の中でも定番中の定番である．[Har77] において，アファインスキーム Spec(A) の構造層 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ は，開集合 $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ に対して次の可換環を対応させて得られる層として定義される：

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) \coloneqq \left\{ s \colon U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \;\middle|\; \text{各 } \mathfrak{p} \in U \text{ に対し } s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}} \text{ であり，次の条件 (*) をみたすもの} \right\} \tag{1}$$

(*) 各 $\mathfrak{p} \in U$ に対して，$\mathfrak{p}$ の開近傍 $V \subseteq U$ と元 $a, f \in A$ が存在して，すべての $\mathfrak{q} \in V$ で $f \notin \mathfrak{q}$ かつ $s(\mathfrak{q}) = a/f$ が成り立つ．

しかし，この定義だけみても何が何だかわからない．層とは，もともと開集合上の関数たち全体のもつ性質を抽象化したものである．この思想に立てば，上記の層 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ も，開集合 U 上の "関数" を集めたものとして定まっていることはわかるが，少々天下り的だと感じる．

そこで，この記事では [Har77] とは異なる方法で $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ を構成し，それが上記のように書けることを確認する．なお，[Har77] 以外の代数幾何学の教科書で，上記 (1) のように定義しているものは少ない．

基本的な代数と圏論の知識は仮定する．

* Twitter: `https://twitter.com/paper3510mm`

1　環のスペクトル

環のスペクトルについて復習する．以下，環といえば単位元をもつ可換環を指す．必要に応じて零環を省く．

環 A に対して，A の素イデアル全体の集合を

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subseteq A \mid \mathfrak{p} \text{ は素イデアル }\}$$

とおく．$A \neq 0$ なら，A は少なくとも一つは素イデアルをもつから，$\mathrm{Spec}(A)$ は空ではない．

イデアル $\mathfrak{a} \subseteq A$ に対して，$\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合を

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

と定める．このとき次がいえる．

> **補題 1.1.** イデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_\nu$ について，次が成立．
>
> (i) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \implies V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$
> (ii) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$
> (iii) $\bigcap_\nu V(\mathfrak{a}_\nu) = V(\sum \mathfrak{a}_\nu)$
> (iv) $V((0)) = \mathrm{Spec}(A)$, $V((1)) = \emptyset$

証明. 省略. □

この補題の (ii)〜(iv) から，$\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合族 $\{V(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \text{ はイデアル }\}$ は閉集合の公理をみたすことがわかる．ゆえに，$\{V(\mathfrak{a})\}$ を閉集合系とする位相が $\mathrm{Spec}(A)$ に定まる．この位相を Zariski 位相 (Zariski topology) と呼ぶ．Zariski 位相の入った位相空間 $\mathrm{Spec}(A)$ を，環 A のスペクトル (spectrum) という．位相の入れ方から，$\mathrm{Spec}(A)$ の開集合は，$\mathfrak{a}$ をイデアルとして $V(\mathfrak{a})^c$ という形の集合である．特に $f \in A$ に対し

$$D(f) \coloneqq \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

は，$D(f) = V((f))^c$ とかけるから，$\mathrm{Spec}(A)$ の開集合である．こうした形の開集合は $\mathrm{Spec}(A)$ の開基を与えることがわかる:

> **補題 1.2.** $\mathcal{B} \coloneqq \{D(f) \mid f \in A\}$ は，位相空間 $\mathrm{Spec}(A)$ の開基をなす．

証明. 任意の開集合 $U = V(\mathfrak{a})^c$ とその元 $\mathfrak{p} \in U$ に対して，$\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ より $f \in \mathfrak{a}$ かつ $f \notin \mathfrak{p}$ となるものが存在し，このとき $\mathfrak{p} \subseteq D(f) \subseteq U$ となる．よって $\mathcal{B}$ は $\mathrm{Spec}(A)$ の開基. □

特に補題 1.1 より，$f, g \in A$ に対し $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ となり，開基 $\mathcal{B}$ は有限の交叉で閉じる．

補題 1.3. A の元 $f, g, f_i (i \in I)$ について，次が成り立つ．

(i) $D(g) \subseteq D(f) \iff g \in \sqrt{(f)}$

(ii) $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i \in I} D(f_i) \iff (f_i)_i = A$

証明． (i) $\sqrt{(f)} = \bigcap_{(f) \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ であるから，

$$\begin{aligned} g \notin \sqrt{(f)} &\iff \exists \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A), f \in \mathfrak{p} \,\&\, g \notin \mathfrak{p} \\ &\iff \exists \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A), \mathfrak{p} \notin D(f) \,\&\, \mathfrak{p} \in D(g) \\ &\iff D(g) \nsubseteq D(f) \end{aligned}$$

(ii) ($\Rightarrow$): $(f_i)_i \neq A$ だとすると，ある $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ が存在して $(f_i)_i \subseteq \mathfrak{p}$ となる．このときすべての $i \in I$ で，$f_i \in \mathfrak{p}$ より $\mathfrak{p} \notin D(f_i)$ となるが，これは $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_i D(f_i)$ に反する．よって $(f_i)_i = A$ である．($\Leftarrow$): $\emptyset = V(A) = V((f_i)_i) = \bigcap_i V(f_i)$ であるから，補集合をとって，$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_i V(f_i)^c = \bigcup_i D(f_i)$ となる． $\square$

環の準同型 $\varphi\colon A \to B$ があるとき，B の素イデアル $\mathfrak{q}$ に対して $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ は A の素イデアルであるから，写像

$$\varphi^a\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A), \quad \mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

が定まる．$f \in A$ に対し $(\varphi^a)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ となることから，この φ^a は Zariski 位相に関して連続である．

環準同型として局所化に付随する準同型 $\varphi_f\colon A \to A_f; a \mapsto a/1$ を考えるとき，連続写像 $\varphi_f^a\colon \mathrm{Spec}(A_f) \to \mathrm{Spec}(A)$ は，同相

$$\mathrm{Spec}(A_f) \cong D(f)$$

を誘導することもわかる．

2　層

位相空間 X 上の集合の層の一般論を展開する．

位相空間 X の開集合系を $\mathsf{Open}(X)$ で表す．$\mathsf{Open}(X)$ は，包含関係による順序で半順序集合をなし，圏とみなせる．

定義 2.1. 位相空間 X 上の集合の前層 (presheaf of sets) とは，$\mathsf{Open}(X)$ から Set への反変関手 $P\colon \mathsf{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ のこと．すなわち次のデータからなるものである：

(i) $U \in \mathsf{Open}(X)$ に対して $P(U) \in \mathsf{Set}$ が与えられている．

(ii) $V \subseteq U \in \mathsf{Open}(X)$ に対して $\rho_{UV}\colon P(U) \to P(V)$ が与えられている．

(iii) $U \in \mathsf{Open}(X)$ に対して $\rho_{UU} = \mathrm{id}_{P(U)}$ である．

(iv) $W \subseteq V \subseteq U$ のとき，$\rho_{VW} \circ \rho_{UV} = \rho_{UW}$ が成り立つ．

このとき，ρ_{UV} を制限写像とよぶ．どの前層の制限写像であるかを明示して，ρ^P_{UV} と書くこともある．また，しばしば $s \in P(U)$ に対して $\rho_{UV}(s) = s|_V$ と書く．

前層の間の射とは，自然変換のこと．前層の準同型とも呼ぶ．X 上の前層とその準同型のなす圏を $\mathsf{Psh}(X)$ とする．

定義 2.2. 位相空間 X 上の集合の前層 F が層 (sheaf of sets) であるとは，任意の開集合 U とその開被覆 $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ に対して次の二つの条件をみたすもののこと：

(F1) 元 $f, g \in F(U)$ に対して，すべての $i \in I$ で $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ が成り立つならば，$f = g$ である．

(F2) 元 $f_i \in F(U_i)(i \in I)$ に対して，すべての $i, j \in I$ で $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ が成り立つならば，$f|_{U_i} = f_i$ となる $f \in F(U)$ が存在する．

層の間の射とは，前層としての射のこと．層の準同型とも呼ぶ．X 上の層とその準同型のなす圏を $\mathsf{Sh}(X)$ とする．$\mathsf{Sh}(X)$ は $\mathsf{Psh}(X)$ の充満部分圏である．

注意. 定義から明らかなように，X 上の前層 F が層であることと，任意の開集合 U とその開被覆 $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ に対して

$$F(U) \xrightarrow{\quad e \quad} \prod_{i\in I} F(U_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j)$$

が equalizer 図式となることは同値である．ここで，$e\colon f \mapsto \{f|_{U_i}\}_i$，$p\colon \{f_i\}_i \mapsto \{f_i|_{U_i\cap U_j}\}_{i,j}$，$q\colon \{f_i\}_i \mapsto \{f_j|_{U_i\cap U_j}\}_{i,j}$ である．

この定義を採用すれば，層の概念は，product をもつ任意の圏 $\mathscr{C}$ で定義できる．すなわち，位相空間 X 上の $\mathscr{C}$-object の層を，反変関手 $F\colon \mathsf{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ であって，任意の開集合 U の開被覆 $U = \bigcup_i U_i$ に対して上の図式が equalizer となるものとして定義できる．特に $\mathscr{C} = \mathsf{Ab}, \mathsf{Mod}, \mathsf{Ring}$ のとき，$\mathscr{C}$-object の層をそれぞれ，アーベル群の層，加群の層，環の層という．このような層については，層の条件 (F1) はしばしば条件

(F1′) 元 $f \in F(U)$ に対して，すべての $i \in I$ で $f|_{U_i} = 0$ が成り立つならば，$f = 0$ である．

に取って代わる．

定義 2.3. 位相空間 X の開基 $\mathcal{B}$ であって，有限の交叉で閉じるものを考える．$\mathcal{B}$ は包含写像によって圏とみなせる．これは $\mathsf{Open}(X)$ の部分圏である．この $\mathcal{B}$ に対して，$\mathcal{B}$ 上の集合の層とは，$\mathcal{B}$ 上の前層 $F\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ であって，任意の $B \in \mathcal{B}$ と $\mathcal{B}$ の元からなる B の開被覆

$B = \bigcup_{i \in I} B_i$ に対し

$$F(B) \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} F(B_i) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j \in I} F(B_i \cap B_j)$$

が equalizer 図式になるもののこと (e, p, q は注意と同様のもの). $\mathcal{B}$ 上の集合の層の間の射とは，自然変換のこと．$\mathcal{B}$ 上の層とその射のなす圏を $\mathsf{Sh}(\mathcal{B})$ とかく．

位相空間 X 上の層は，開集合の被覆 $U = \bigcup_i U_i$ に対して equalizer 図式をみたさねばならない．開基が与えられていれば，開集合 U はその開基の元からなる被覆をもつので，X 上の層はその (有限の交叉で閉じるような) 開基上での対応から決定される．

定理 2.4. X を位相空間，$\mathcal{B}$ を有限の交叉で閉じるような X の開基とする．X 上の層 $F \in \mathsf{Sh}(X)$ に対し，それを $\mathcal{B}$ 上に制限することで $\mathbf{r}(F) \in \mathsf{Sh}(\mathcal{B})$ が得られ，この対応は関手

$$\mathbf{r} \colon \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{Sh}(\mathcal{B})$$

を与える．このとき，$\mathbf{r}$ は圏同値 $\mathsf{Sh}(X) \simeq \mathsf{Sh}(\mathcal{B})$ を導く．

証明. 逆関手

$$\mathbf{s} \colon \mathsf{Sh}(\mathcal{B}) \to \mathsf{Sh}(X)$$

を構成しよう．$G \in \mathsf{Sh}(\mathcal{B})$ をとる．開集合 $U \in \mathsf{Open}(X)$ に対し，$\mathcal{B}$ は開基だから開集合族 $\{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\}$ は U の開被覆になる．この開被覆を $\{B_i\}_{i \in I} \coloneqq \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\}$ と添え字付けるとき，集合 $\mathbf{s}(G)(U)$ を equalizer

$$\mathbf{s}(G)(U) \dashrightarrow \prod_{i \in I} G(B_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} G(B_i \cap B_j)$$

によって定める．特に $U = B \in \mathcal{B}$ のときは G が層であることから

$$G(B) \longrightarrow \prod_{i \in I} G(B_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} G(B_i \cap B_j)$$

は equalizer となっているので，

$$\mathbf{s}(G)(B) = G(B)$$

としてよい．$U' \subseteq U \in \mathsf{Open}(X)$ に対して，equalizer $\mathbf{s}(G)(U')$ の普遍性から

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{s}(G)(U) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\rho_{UU'}"] & \prod_{i \in I} G(B_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod_{i,j \in I} G(B_i \cap B_j) \arrow[d] \\
\mathbf{s}(G)(U') \arrow[r] & \prod_{i \in I} G(B'_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j \in I} G(B'_i \cap B'_j)
\end{tikzcd}$$

をえる．これらの対応 $U \mapsto \mathbf{s}(G)(U)$ は反変関手 $\mathbf{s}(G)$ をなし，G が層であることと極限同士は交換することから，$\mathbf{s}(G)$ はまた X 上の層となる．射の対応も普遍性用いて構成でき，関手 $\mathbf{s}\colon \mathsf{Sh}(\mathcal{B}) \to \mathsf{Sh}(X)$ が得られる．

このとき，$G \in \mathsf{Sh}(\mathcal{B})$，$B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mathbf{rs}(G)(B) = G(B)$$

であり，$F \in \mathsf{Sh}(X)$，$U \in \mathsf{Open}(X)$ に対して

$$\mathbf{sr}(F)(U) \cong F(U)$$

がいえるから，$\mathbf{r}$ は圏同値を導く． □

この定理 2.4 から，開基上の層があれば，それを位相空間上の層に同型を除いて一意に (unique up to isomorphisms) 拡張できることもわかる．

後で使うため，茎・芽の概念もここで紹介しておく．

定義 2.5. P を位相空間 X 上の集合の前層とする．点 $x \in X$ の開近傍全体の集合を $\mathfrak{N}(x)$ と表す．開近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ を $\mathsf{Open}(X)$ の部分圏とみなすとき，関手 $\mathfrak{N}(x)^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathsf{Open}(X)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathsf{Set}$ の colimit を，前層 P の x での茎 (stalk at x) といい，$\varinjlim_{x\in U} P(U)$ あるいは P_x とかく．明示的に書き表せば，集合の coproduct $\coprod_{U\in\mathfrak{N}(x)} P(U)$ を，$s \in P(U)$ と $t \in P(V)$ に対し

$$s \sim t :\iff \exists W \in \mathfrak{N}(x),\ W \subseteq U \cap V \ \&\ s|_W = t|_W$$

によって定まる同値関係 $\sim$ で割った集合

$$P_x = \varinjlim_{x\in U} P(U) = \left(\coprod_{U\in\mathfrak{N}(x)} P(U)\right)/\!\sim$$

である．このとき s の P_x での同値類を，s の x での芽 (germ at x) といい，$\mathrm{germ}_x s$ とかく．

前層の準同型 $h\colon P \to Q$ があるとき，各点 $x \in X$ において普遍性により

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "\mathrm{germ}_x"'] & Q(U) \arrow[d, "\mathrm{germ}_x"] \\
P_x \arrow[r, dashed, "h_x"] & Q_x
\end{tikzcd}$$

が可換になる $h_x\colon P_x \to Q_x$ が得られる．

3 アファインスキームの構造層

層とは空間上の関数を集めたものである．位相空間 $\mathrm{Spec}(A)$ の各開集合に対しては，その開集合上の “正則な関数 (regular function)” のなす環を対応させることを考える．これは古典的な場

合における多様体の座標環の考え方を一般化したものである．ここで正則関数とは，分母の値に 0 をとらないような有理式として表せる関数のことである．$f \in A$ に対して，$\mathfrak{p} \in D(f)$ のとき $f \notin \mathfrak{p}$ より $f \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ である．古典的な場合に振り返ってみると，これは空間 $\mathrm{Spec}(A)$ の点 $\mathfrak{p}$ において，関数 $f \in A$ の値が 0 にならないことを示している．すると，関数 $f \in A$ は $D(f)$ 上では 0 にならず，$a/f^n (a \in A)$ は $D(f)$ 上の正則関数とみなすことができる．ゆえに，環 A_f は $D(f)$ 上の正則関数のなす環と思うことができる．

こうした観察から，$\mathrm{Spec}(A)$ 上の環の層として，開集合 $D(f)$ に対し環 A_f が対応するものを考えられる．ここで，環 A のスペクトル $\mathrm{Spec}(A)$ の開基 $\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$ は有限の交叉で閉じていたことを思い出そう．前節の定理から，$\mathcal{B}$ 上の層があればそれを拡張して $\mathrm{Spec}(A)$ 上の層を作ることができる．

$\mathcal{B}$ 上の環の層 F を構成しよう[*1]．開基の元 $D(f) \in \mathcal{B}$ に対して環 A_f を対応させる:

$$F(D(f)) = A_f.$$

$D(g) \subseteq D(f) \in \mathcal{B}$ のとき，補題 1.3 より $g \in \sqrt{(f)}$ が成り立ち

$$\exists m \geq 0, \exists r \in A, \ g^m = rf$$

となる．この等号から A_g において $f/1 \cdot r/g^m = 1$ が成り立ち，$f/1$ は A_g の単元である．よって，環準同型 $\varphi_g \colon A \to A_g$ を考えたとき，A_f の普遍性から

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_f"] \arrow[dr, "\varphi_g"'] & A_f \arrow[d, dashed, "\rho_{D(f)D(g)}"] \\ & A_g \end{tikzcd}$$

を可換にする $\rho_{D(f)D(g)} \colon A_f = F(D(f)) \to A_g = F(D(g))$ が存在する．具体的に表せば $\rho_{D(f)D(g)}(a/f^n) = ar^n/g^{nm}$ である．これを制限写像にすることで，開基 $\mathcal{B}$ 上の環の前層

$$F \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ring}$$

が得られる．特に $D(f) = D(g)$ のとき，$D(g) \subseteq D(f)$ かつ $D(f) \subseteq D(g)$ であるから，$\rho_{D(f)D(g)}$ と $\rho_{D(g)D(f)}$ が存在し，局所化の普遍性から $\rho_{D(g)D(f)} \circ \rho_{D(f)D(g)} = \mathrm{id}_{A_f}$ かつ $\rho_{D(f)D(g)} \circ \rho_{D(g)D(f)} = \mathrm{id}_{A_g}$ が成り立つ．よって $A_f \cong A_g$ となり，$F(D(f)) = A_f$ は $f \in A$ の取り方に依らないことがわかる．$D(fg) = D(g) \subseteq D(f)$ と考えるときは

$$\rho_{D(f)D(fg)} \colon A_f \to A_g \cong A_{fg}, \quad a/f^n \mapsto ag^n/(fg)^n$$

であることもわかる．

この $\mathcal{B}$ 上の前層 F は次のように層をなす．

[*1] 以下に続く $\mathrm{Spec}(A)$ 上の層 $\widetilde{A}$ の構成は，より一般に A-加群 M に対して適用できる．つまり A-加群 M から，$\mathrm{Spec}(A)$ 上の $\widetilde{A}$-加群層 $\widetilde{M}$ が同様に構成できる．

補題 3.1. 任意の $\mathcal{B}$ の元の被覆 $D(f)=\bigcup_{i\in I}D(f_i)$ に対して，次が成立：

(i) 元 $s\in A_f$ に対して，すべての $i\in I$ で $s|_{D(f_i)}=0$ が成り立つならば，$s=0$ である．

(ii) 元 $s_i\in A_{f_i}(i\in I)$ に対して，すべての $i,j\in I$ で $s_i|_{D(f_if_j)}=s_j|_{D(f_if_j)}$ が成り立つならば，$s|_{D(f_i)}=s_i$ となる $s\in A_f$ が存在する．

証明. $D(f)\cong \mathrm{Spec}(A_f)$ と同一視することで，はじめから $D(f)=\mathrm{Spec}(A)$，$f=1$ としてよい．すると $\mathrm{Spec}(A)=\bigcup_i D(f_i)$ だから補題 1.3 より $(f_i)_i=A$ が成り立つ．特に有限部分集合 $I'=\{1,\dots,l\}\subseteq I$ が存在して，$(f_1,\dots,f_l)=(1)$ となる．

(i) 各 $i\in I'$ に対し $s|_{D(f_i)}=s/1=0$ であるから，十分大きな $n>0$ をとれば，すべての $i\in I'$ で $f_i^ns=0$ とできる．このとき，$(f_1,\dots,f_l)=(f_1^n,\dots,f_l^n)=(1)$ であるから，$s\in(sf_1^n,\dots,sf_l^n)=(0)$ となり，$s=0$ がいえる．

(ii) I' は有限集合だから，すべての $i\in I'$ で $s_i=a_i/f_i^n(a_i\in A,n>0)$ と書ける．各 $i,j\in I'$ で $a_if_j^n/(f_if_j)^n=s_i|_{D(f_if_j)}=s_j|_{D(f_if_j)}=a_jf_i^n/(f_if_j)^n$ であるから，十分大きな $m>0$ をとれば，すべての $i,j\in I'$ で $(f_if_j)^m(a_if_j^n-a_jf_i^n)=0$ とできる．変形して $f_j^{n+m}(f_i^ma_i)=f_i^{n+m}(f_j^ma_j)$ である．$(f_1,\dots,f_l)=(f_1^{n+m},\dots,f_l^{n+m})\quad=(1)$ だから

$$\exists b_1,\dots,b_l\in A,\quad \sum_{j\in I'}b_jf_j^{n+m}=1$$

となる．このとき，$s=\sum_{i\in I'}b_i(f_i^ma_i)\in A$ とおくと，

$$f_i^{n+m}s=\sum_{j\in I'}f_i^{n+m}b_j(f_j^ma_j)=\sum_{i\in I'}b_jf_j^{n+m}(f_i^ma_i)=f_i^ma_i$$

となり，$s|_{D(f_i)}=s/1=(f_i^ma_i)/f_i^{n+m}=s_i$ をみたす． □

定理 2.4 より，$\mathcal{B}$ 上の層 F は，圏同値 $\mathbf{s}$ によって $\mathrm{Spec}(A)$ 上の層に一意に拡張される．これは $D(f)$ に A_f が対応する，同型を除いて唯一の層である．これを，$\widetilde{A}\coloneqq\mathbf{s}(F)$ とおく．

層の定義の equalizer 図式から，一般の開集合 $U\subseteq\mathrm{Spec}(A)$ に対して $U=\bigcup_{i\in I}D(f_i)$ と被覆されるとき

$$\widetilde{A}(U)=\left\{s=(s_i)_i\in\prod_{i\in I}A_{f_i}\;\middle|\;\forall i,j\in I,\,s_i|_{D(f_if_j)}=s_j|_{D(f_if_j)}\right\}$$

と表せる．特に構成から，$f\in A$ について $\widetilde{A}(D(f))=F(D(f))=A_f$，$\widetilde{A}(\mathrm{Spec}(A))=A$ が明らかに成り立つ．点 $\mathfrak{p}$ での stalk $\widetilde{A}_{\mathfrak{p}}$ が，環 A の $\mathfrak{p}$ での局所化となることも，次の補題から明らかであろう．

補題 3.2. 環 A の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，

$$\varinjlim_{D(f)\in\mathfrak{N}(\mathfrak{p})}A_f\cong A_{\mathfrak{p}}.$$

ただし左辺は $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})\cap\mathcal{B}$ に包含と逆の順序を入れて有向集合をみたときの順極限である．

証明．$D(f) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ なる $f \in A$ に対し，$f \notin \mathfrak{p}$ であるから $f/1$ は $A_\mathfrak{p}$ の単元となるので，A_f の普遍性より

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\varphi_f"'] \arrow[dr, "\varphi_\mathfrak{p}"] & \\ A_f \arrow[r, dashed, "\psi_f"'] & A_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

を可換にする $\psi_f\colon A_f \to A_\mathfrak{p}$ が存在する (ここで $\varphi_f, \varphi_\mathfrak{p}$ はそれぞれ局所化 $A_f, A_\mathfrak{p}$ に付随する準同型)．$f, g \in A$ が $D(f) \supseteq D(g)$ をみたすとき，普遍性から

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[d] \arrow[dr, "\psi_f"] & \\ A_g \arrow[r, "\psi_g"'] & A_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

が可換になることがわかるので，順極限 $\varinjlim_{D(f)\in\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} A_f$ の普遍性より

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[d] \arrow[dr, "\psi_f"] & \\ \varinjlim A_f \arrow[r, dashed, "\psi"'] & A_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

が可換になる $\psi\colon \varinjlim_{D(f)\in\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} A_f \to A_\mathfrak{p}$ が存在する．

一方，$f \notin \mathfrak{p}$ に対し，f を $A \to \varinjlim_{D(f)\in\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} A_f$ で送った像は，A_f を経由することから $\varinjlim_{D(f)\in\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} A_f$ の単元であり，ゆえに $A_\mathfrak{p}$ の普遍性から

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr, "\psi_\mathfrak{p}"] & \\ \varinjlim A_f & A_\mathfrak{p} \arrow[l, dashed, "\phi"] \end{tikzcd}$$

が可換になる $\phi\colon A_\mathfrak{p} \to \varinjlim_{D(f)\in\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} A_f$ が存在する．

普遍性から，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}$，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ となることがわかり，同型 $\varinjlim_{D(f)\in\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} A_f \cong A_\mathfrak{p}$ が成り立つ． □

この補題と，$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \cap \mathcal{B}$ が $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ の共終な部分有向集合であることから

$$\widetilde{A}_\mathfrak{p} = \varinjlim_{\mathfrak{p}\in U} \widetilde{A}(U) = \varinjlim_{D(f)\in\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} \widetilde{A}(D(f)) = \varinjlim_{D(f)\in\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} A_f = A_\mathfrak{p}$$

が成立する．

4 Hartshorne による定義との一致性

前節で $\mathrm{Spec}(A)$ 上の環の層 $\widetilde{A}$ を構成した．しかし， [Har77] の与える定義とは異なっている．層 $\widetilde{A}$ が [Har77] での表示 1 で書けることは，前層の層化の構成が関連している．

前層の層化についての一般論を述べる前に，位相空間上のバンドルの概念を導入しよう．

定義 4.1. 位相空間 X 上のバンドル (bundle over X) とは，位相空間 B と連続写像 $p\colon B \to X$ との組 (B,p) のことである．バンドル (B,p) からバンドル (B',p') への射とは，連続写像 $f\colon B \to B'$ であって図式

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

が可換になるもののこと．X 上のバンドルとその射のなす圏を $\mathsf{Bund}(X)$ とかく．言い換えると，X 上のバンドルの圏とは，Top の X でのスライス圏 (slice category) Top/X のことである．

開集合 $U \subseteq X$ は，包含写像 $i_U\colon U \hookrightarrow X$ とあわせて，X 上のバンドル (U, i_U) とみなせる．このときバンドル (B,p) に対し，バンドルの射 $s\colon (U,i_U) \to (B,p)$ を p の U 上の切断という．言い換えれば，p の U 上の切断とは，連続写像 $s\colon U \to B$ であって $p \circ s = i_U$ をみたすもののことである．

バンドル (B,p) から以下のように X 上の層を構成することができる．開集合 $U \in \mathsf{Open}(X)$ に対して U 上の切断の集合

$$\Gamma_p(U) = \{s\colon U \to B \mid p \circ s = i_U\}$$

を対応させ，包含 $V \subseteq U \in \mathsf{Open}(X)$ に対して制限写像

$$\Gamma_p(U) \to \Gamma_p(V), \quad s \mapsto s|_V$$

を対応させることで，前層

$$\Gamma_p\colon \mathsf{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$$

が得られる．実はこの前層は層をなす：

命題 4.2. 位相空間 X 上のバンドル (B,p) に対して，X 上の前層 $\Gamma_p\colon \mathsf{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ は層である．

証明. 開集合 U とその開被覆 $U = \bigcup_i U_i$ をとる．Γ_p が層の条件 (F1) をみたすことは明らか．条件 (F2) をみたすことを示そう．

$(s_i) \in \prod_i \Gamma_p(U_i)$ が，すべての i,j に対し $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ をみたすとする．写像 $s\colon U \to B$ を，$x \in U = \bigcup_i U_i$ に対して $x \in U_i$ のとき

$$s(x) \coloneqq s_i(x)$$

によって定める．$x \in U_j$ でもあるとき，$x \in U_i \cap U_j$ かつ $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ であるから，$s_i(x) = s_j(x)$ となり s は well-defined に定まっている．定義より各 i で $s|_{U_i} = s_i|_{U_i}$ となってい

るから，s は連続．さらに，$x \in U_i$ のとき $p \circ s(x) = p \circ s_i(x) = i_{U_i}(x) = i_U(x)$ より，$p \circ s = i_U$ が成り立ち，s は p の U 上の切断である．よって Γ_p は (F2) をみたすこともわかった． $\square$

バンドルの間の射 $f\colon (B,p) \to (B',p')$ があるとき，

$$(\Gamma f)_U \colon \Gamma_p(U) \to \Gamma_{p'}(U), \quad s \mapsto f \circ s$$

によって層の準同型 $\Gamma f\colon \Gamma_p \to \Gamma_{p'}$ が得られ，これらの対応は関手

$$\Gamma\colon \mathsf{Bund}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$$

を与える．

一方で，位相空間 X 上の集合の前層に対して，以下のように X 上のバンドルが構成できる．前層 P に対し，各点での stalk P_x による集合の coproduct

$$\Lambda_P = \coprod_{x \in X} P_x$$

を考える．この集合 Λ_P は写像

$$p\colon \Lambda_P \to X, \quad \mathrm{germ}_x s \mapsto x$$

を備えている．各 $s \in P(U)$ に対して

$$\dot{s}\colon U \to \Lambda_P, \quad x \mapsto \mathrm{germ}_x s$$

と定義する．これは明らかに単射である．このとき，Λ_P に部分集合族 $\{\dot{s}(U) \mid U \in \mathsf{Open}(X), s \in P(U)\}$ を開基とする位相を定める[*2]．この位相に関して p は連続となり，Λ_P は X 上のバンドル (Λ_P, p) となる．また $\dot{s}$ も連続であり，$p \circ \dot{s} = i_U$ をみたすから，これは p の U 上の切断である．$\dot{s}$ は開写像であることもわかり，同相写像 $\dot{s}\colon U \xrightarrow{\cong} \dot{s}(U)$ を誘導する．

前層の準同型 $h\colon P \to Q$ があるとき，各点での stalk の間の写像の族 $\{h_x\colon P_x \to Q_x\}_{x \in X}$ から連続写像

$$\Lambda h\colon \Lambda_P \to \Lambda_Q$$

が得られる．これは明らかにバンドルの射 $\Lambda h\colon (\Lambda_P, p) \to (\Lambda_Q, q)$ をなす．これらの対応は，関手

$$\Lambda\colon \mathsf{Psh}(X) \to \mathsf{Bund}(X)$$

を与える．

以上二つの関手が存在することがわかった．合成関手 $\Gamma\Lambda\colon \mathsf{Psh}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$ は，包含関手 $\mathsf{Sh}(X) \hookrightarrow \mathsf{Psh}(X)$ の左随伴であることが知られていて，層化関手 (sheafification functor) と呼ばれる．前層 P に対し，層 $\Gamma\Lambda(P)$ を P の層化 (sheafification) という．

[*2] 明らかに $\Lambda_P = \bigcup\{\dot{s}(U) \mid U \in \mathsf{Open}(X), s \in P(U)\}$ である，$\mathrm{germ}_x r \in \dot{s}(U) \cap \dot{t}(V)$ をとると，$\mathrm{germ}_x s = \mathrm{germ}_x r = \mathrm{germ}_x t$ より，ある x の開集合 $W \subseteq U \cap V$ が存在して $s|_W = t|_W$ となる．すると $\mathrm{germ}_x r \in (\dot{s|_W})(W) \subseteq \dot{s}(U) \cap \dot{t}(V)$ が成り立ち，$\{\dot{s}(U)\}$ は開基の条件をみたす．

前層 P があるとき，各開集合 U について写像

$$\eta_U\colon P(U) \to \Gamma\Lambda_P(U), \quad s \mapsto \dot{s}$$

が自然に定まり，前層の準同型 $\eta\colon P \Rightarrow \Gamma\Lambda_P$ が得られる．P が層のときこの η は層の同型となる：

命題 4.3. P が層であるとき，$\eta\colon P \Rightarrow \Gamma\Lambda_P$ は層の同型を与える．

証明. $\underline{\eta_U \text{ が単射であること}}$：$s, t \in P(U)$ に対し $\dot{s} = \dot{t}$ であるとする．各 $x \in U$ について，$\mathrm{germ}_x s = \mathrm{germ}_x t$ となるから x の開近傍 $V_x \subseteq U$ が存在して $s|_{V_x} = t|_{V_x}$ となる．U の開被覆 $U = \bigcup_{x\in U} V_x$ を考えれば，P が層であることから，条件 (F1) より $s = t$ を得る．

$\underline{\eta_U \text{ が全射であること}}$：$(h\colon U \to \Lambda_P) \in \Gamma\Lambda_P(U)$ をとるとき，$p \circ h = i_U$ である．各 $x \in U$ について，$p(h_x) = x$ であるから，x の開近傍 U_x と元 $s_x \in P(U_x)$ が存在して $h_x = \mathrm{germ}_x s_x$ とかける．$\dot{s_x}(U_x)$ は Λ_P の開集合で h は連続写像だから，x の開近傍 $V_x \subseteq U_x \cap U$ で $h(V_x) \subseteq \dot{s_x}(U_x)$ となるものが存在する．h も $\dot{s_x}$ も p の切断であることから，$h|_{V_x} = \dot{s_x}|_{V_x}$ が成り立つ．ここで U の開被覆 $U = \bigcup_{x\in U} V_x$ を考えると，$y, y' \in U$ に対し $V_y \cap V_{y'}$ の各点 x で $\mathrm{germ}_x s_y = h(x) = \mathrm{germ}_x s_{y'}$ が成り立つことから，層の条件 (F1) より $s_y|_{U_y \cap U_{y'}} = s_{y'}|_{U_y \cap U_{y'}}$ となる．よって条件 (F2) より $s|_{V_x} = s_x$ となる $s \in P(U)$ が存在する．このとき $x \in U$ に対し $h(x) = \mathrm{germ}_x s_x = \mathrm{germ}_x s = \dot{s}(x)$ が成り立ち，$h = \dot{s} = \eta_U(s)$ となる． □

このように，任意の層は，あるバンドルの切断全体を集めてできた層として表せることがわかる．

この表示を用いて，$\mathrm{Spec}(A)$ 上の層 $\widetilde{A}$ を書き直してみよう．

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(U) &= \Gamma\Lambda_{\widetilde{A}}(U)\\ &= \left\{ t\colon U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}} \;\middle|\; t \text{ は } \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}} \text{ の } U \text{ 上の切断であり，かつ } \exists s \in \widetilde{A}(U), \dot{s} = t \right\}.\end{aligned}$$

ここで，

$$t \text{ は } \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}} \text{ の } U \text{ 上の切断} \iff \forall \mathfrak{p} \in U,\ t(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$$

であり，$U = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ と表すと，$\widetilde{A}$ は層であることから

$$
\begin{aligned}
&\exists s \in \widetilde{A}(U),\ \dot{s} = t\\
&\iff \exists s \in \widetilde{A}(U),\ \forall i \in I,\ \dot{s}|_{D(f_i)} = t|_{D(f_i)}\\
&\iff \forall i \in I,\ \exists s_i \in \widetilde{A}(D(f_i)),\ t|_{D(f_i)} = \dot{s_i}\\
&\iff \forall \mathfrak{p} \in U,\ \exists f \in A \,\mathrm{with}\, \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U,\ \exists s \in \widetilde{A}(D(f)) = A_f,\ t|_{D(f)} = \dot{s}\\
&\iff \forall \mathfrak{p} \in U,\ \exists f \in A \,\mathrm{with}\, \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U,\ \exists a \in A,\ t|_{D(f)} = (\dot{a/f})\\
&\iff \forall \mathfrak{p} \in U,\ \exists f \in A \,\mathrm{with}\, \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U,\ \exists a \in A,\\
&\qquad\quad \forall \mathfrak{q} \in D(f),\ t(\mathfrak{q}) = \mathrm{germ}_{\mathfrak{q}}(a/f) = a/f\\
&\iff \forall \mathfrak{p} \in U,\ \exists V \in \mathsf{Open}(X) \,\mathrm{with}\, \mathfrak{p} \in V \subseteq U,\ \exists f, a \in A,\\
&\qquad\quad \mathrm{s.t.}\ \forall \mathfrak{q} \in D(f),\ f \notin \mathfrak{q} \,\mathrm{and}\, t(\mathfrak{q}) = a/f
\end{aligned}
$$

となり，[Har77] での定義の表示 1 が得られることがわかる．

5　結びに

アファインスキームの構造層の定義は，$\mathrm{Spec}(A)$ の開基 $\{D(f) \mid f \in A\}$ 上の層を全域に拡張して構成するのがよいと思う．この構成から開基で一致する層は全域でも一致することがわかるし，また射影スキームの構造層や A-加群に付随する $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-加群層も同じようにつくれることもわかるからである．[Liu02] や [GörWed10] はそのように導入している．[上野 05] もわかりにくいが，開基上の層について言及している (しかし構造層の定義は [Har77] と同じ方法で定義している)．層の一般論は [SGL] の二章を参考にした．バンドルの圏と前層の圏の間の随伴 $\Lambda \dashv \Gamma$ についても書かれている．

書いておいてなんだが，この記事の議論は準備が長くあまりすっきりしていない (気もする)．[ゆじとも] では，開基上の前層 $D(f) \mapsto A_f$ が層となることを，忠実平坦性から見通し良く紹介しており，この層を位相空間 $\mathrm{Spec}(A)$ 上に拡張する方法も右 Kan 拡張を用いて述べていて，非常に明快な議論となっている．圏論に馴染みがあれば，こちらを参照されたい．

参考文献

[SGL] S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag, 1991.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[Liu02] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press, 2002.

[GörWed10] U. Görtz and T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I: Schemes with Examples and Exercises*, Viewing+Teubner Verlag, 2010.

[上野 05] 上野健爾，代数幾何，岩波書店，2005.

[柳田] 柳田伸太郎，2018 年度前期 代数学 IV/代数学概論 IV 講義ノート．
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2018WA.html
[ゆじとも] ゆじとも，環 A に対してスキーム $\mathrm{Spec}(A)$ を構成する別の方法について - Quen，2019-01-11.
https://www.quen.jp/articles/9ce791c0-1579-11e9-96d6-09b6882e8bad