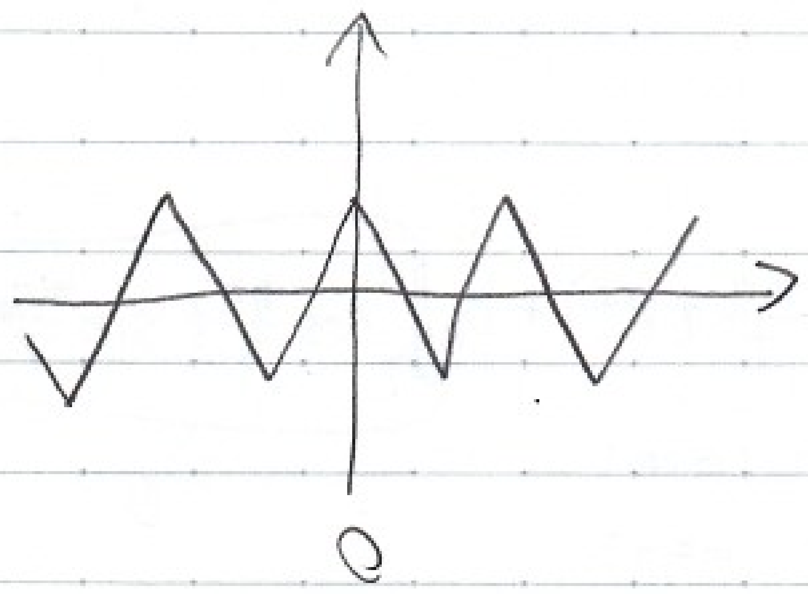
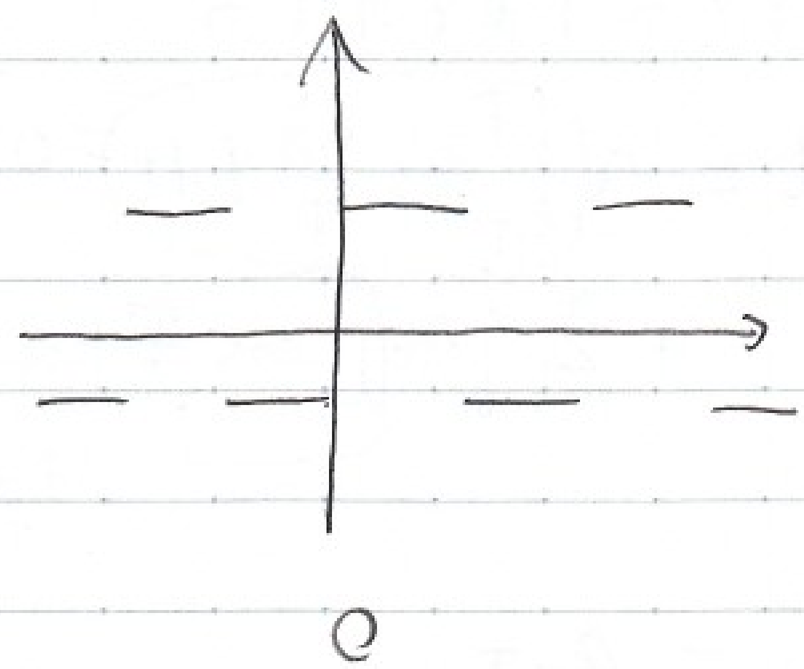
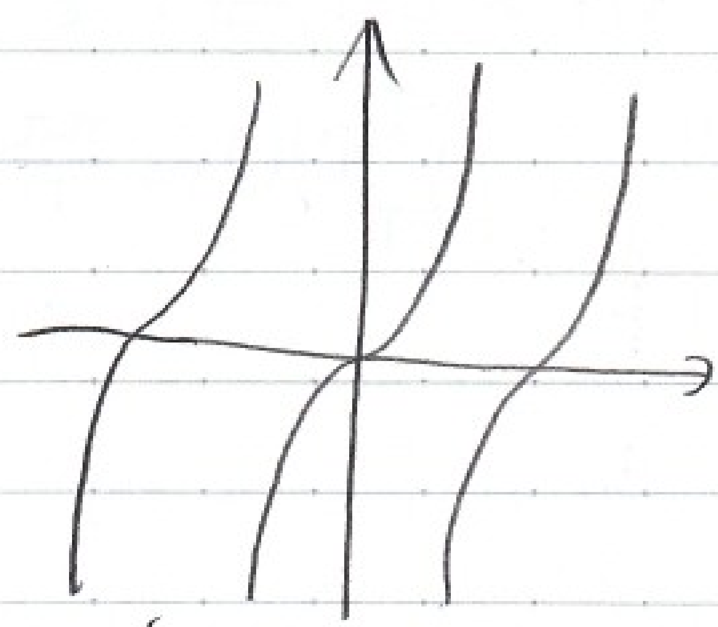
フーリエ級数

区分的に連続な周期関数$f(t)$（周期$2T$）が与えられたとする。







$\tan x$とか × 非有界はダメ

準備

$n, m \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\int_{-T}^{T} \cos\frac{n\pi}{T}t\,dt = 0 \qquad \int_{-T}^{T} \sin\frac{n\pi}{T}t\,dt = 0$$

$$\int_{-T}^{T} \cos\frac{n\pi}{T}t\cos\frac{m\pi}{T}t\,dt = \begin{cases} T & (m=n) \\ 0 & (m\neq n) \end{cases}$$

$$\int_{-T}^{T} \sin\frac{n\pi}{T}t\sin\frac{m\pi}{T}t\,dt = \begin{cases} T & (m=n) \\ 0 & (m\neq n) \end{cases}$$

積和の公式でわかる

$$\int_{-T}^{T} \cos\frac{n\pi}{T}t\sin\frac{m\pi}{T}t\,dt = 0$$

← 奇関数を$-T$からTまで積分してるので0

準備おわり

$f(t)$を定数と$2T$を周期にもつ三角関数の和 $a+(a_1\cos\frac{\pi}{T}t+b_1\sin\frac{\pi}{T}t)+(a_2\cos\frac{2\pi}{T}t+b_2\sin\frac{2\pi}{T}t)+\cdots$ で表すことができないか考える。

$$f(t) = a + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}t + b_n\sin\frac{n\pi}{T}t\right) \quad \cdots ①$$

a, a_n, b_nを$f(t)$から求めよう。

①の両辺を$-T$からTで積分

$$\int_{-T}^{T} f(t)\,dt = \int_{-T}^{T}\left\{a + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}t + b_n\sin\frac{n\pi}{T}t\right)\right\}dt$$

$$= 2aT + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-T}^{T}\cos\frac{n\pi}{T}t\,dt + b_n\int_{-T}^{T}\sin\frac{n\pi}{T}t\,dt\right)$$

↑ Σと積分を形式的にいれかえる

$$= 2aT$$

<u>準備</u>をつかった

$$\therefore\ a = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt$$

① $\times \cos\frac{m\pi}{T}t$ を $-T$ から T まで積分

$$\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{m\pi}{T}t\,dt = a\int_{-T}^{T}\cos\frac{m\pi}{T}t\,dt = 0$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ a_n \underbrace{\int_{-T}^{T}\cos\frac{n\pi}{T}t\cos\frac{m\pi}{T}t\,dt}_{=\begin{cases} T & (m=n) \\ 0 & (m\neq n)\end{cases}} + b_n \underbrace{\int_{-T}^{T}\cos\frac{n\pi}{T}t\sin\frac{m\pi}{T}t\,dt}_{=0} \right\}$$

$$= a_m T$$

$$\therefore\ a_m = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{m\pi}{T}t\,dt$$

$m=0$ とすると $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt = 2a$

① $\times \sin\frac{m\pi}{T}t$ を $-T$ から T まで積分

$$\int_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{m\pi}{T}t\,dt = a\int_{-T}^{T}\sin\frac{m\pi}{T}t\,dt = 0$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ a_n \underbrace{\int_{-T}^{T}\cos\frac{n\pi}{T}t\sin\frac{m\pi}{T}t\,dt}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-T}^{T}\sin\frac{n\pi}{T}t\sin\frac{m\pi}{T}t\,dt}_{=\begin{cases} T & (m=n) \\ 0 & (m\neq n)\end{cases}} \right\}$$

$$= b_m T$$

$$\therefore\ b_m = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{m\pi}{T}t\,dt$$

<u>Def</u>　$f(t)$ を区分的に連続な周期 $2T$ の関数とする.

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{n\pi}{T}t\,dt \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{n\pi}{T}t\,dt \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

を $f(t)$ のフーリエ係数という,

また、$f(t) \sim \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}t + b_n\sin\frac{n\pi}{T}t\right)}_{(*)}$

を $f(t)$ のフーリエ級数展開という.

形式的な無限級数(収束するかどうかは知らない)

1周期の間に有限個の不連続点しかもたず、それらを除いた範囲でC^1級 かつ 不連続点における$f(t)$および$f'(t)$の左側極限と右側極限が存在して有限

fact　$f(t)$が区分的C^1級な周期$2T$の関数なら、

(i) tが$f(t)$の連続な点であるとき

$$(*) = f(t)$$

(ii) tが$f(t)$の不連続点であるとき

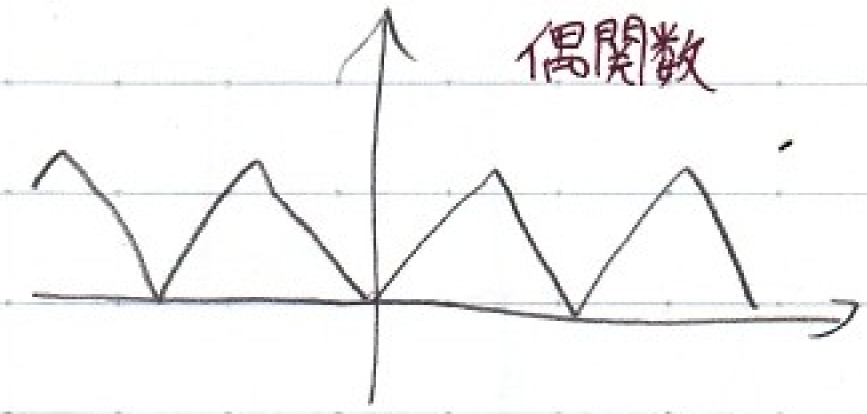
$$(*) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{f(t-0)}_{\text{左側}} + \underbrace{f(t+0)}_{\text{右側}}\right)$$

極限

例1も例2も区分的C^1級

例1　$f(t)=|t|$ $(-1<t\leq 1)$ を $f(t+2)=f(t)$で拡張した周期2の関数のフーリエ級数展開を求める。

偶関数



$T=1$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(t)dt = 2\int_0^1 t\,dt = 1$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t\,dt = 2\int_0^1 t\cos n\pi t\,dt$$

部分積分使えばできる

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

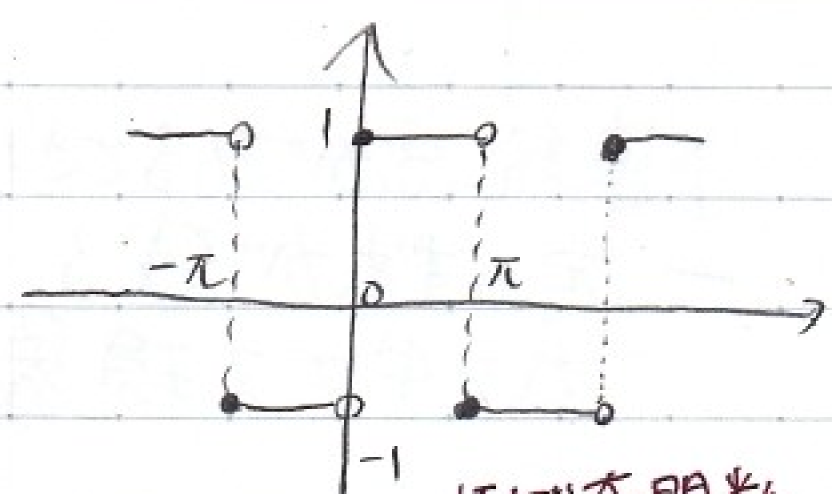
$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t = 0$$

偶関数 × 奇関数 = 奇関数

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos n\pi t$$

例2　$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$ を周期的に拡張したもの

$T=\pi$



ほぼ奇関数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\cos nt\,dt + \int_0^{\pi}\cos nt\,dt\right)$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\sin nt\,dt + \int_0^{\pi}\sin nt\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

Date

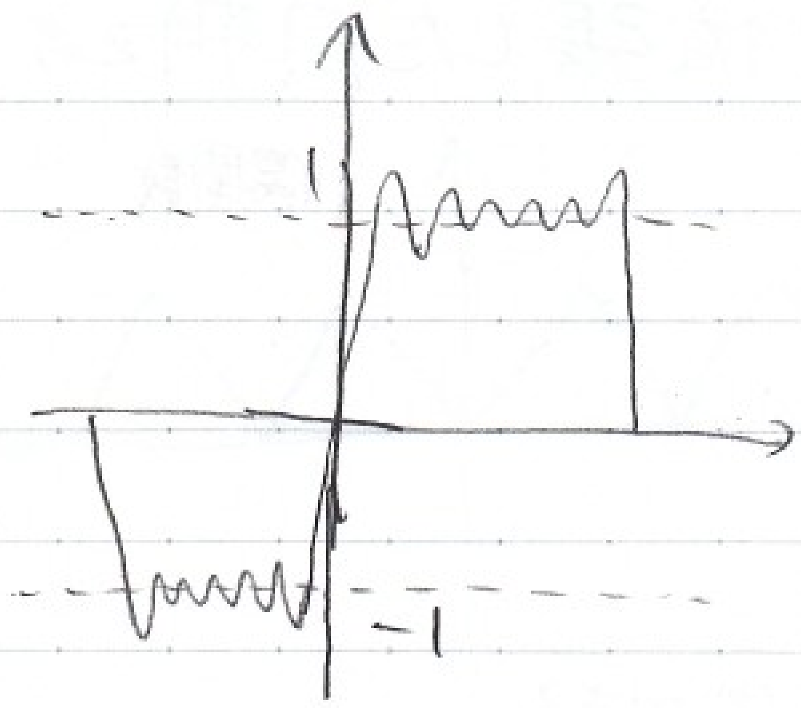
$$f(t) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\sin nt$$
$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right)$$

$t=0$ では $f(t)=0$ になることが確かめられる

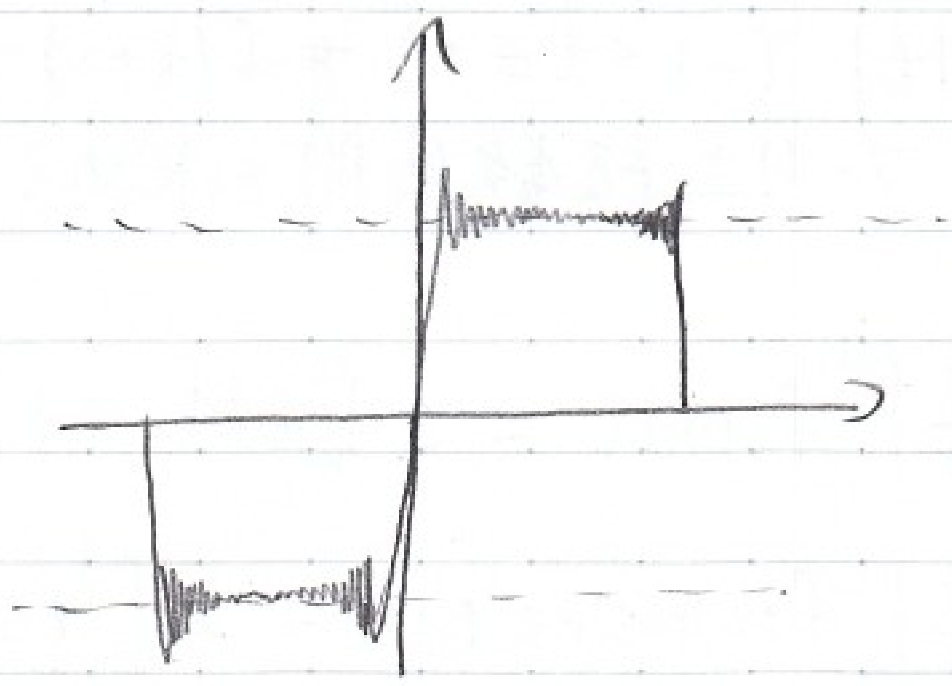
$$f_N(t) := \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\sin nt$$

無限項足さずに途中で計算を打ち切ったものを f_N とする.

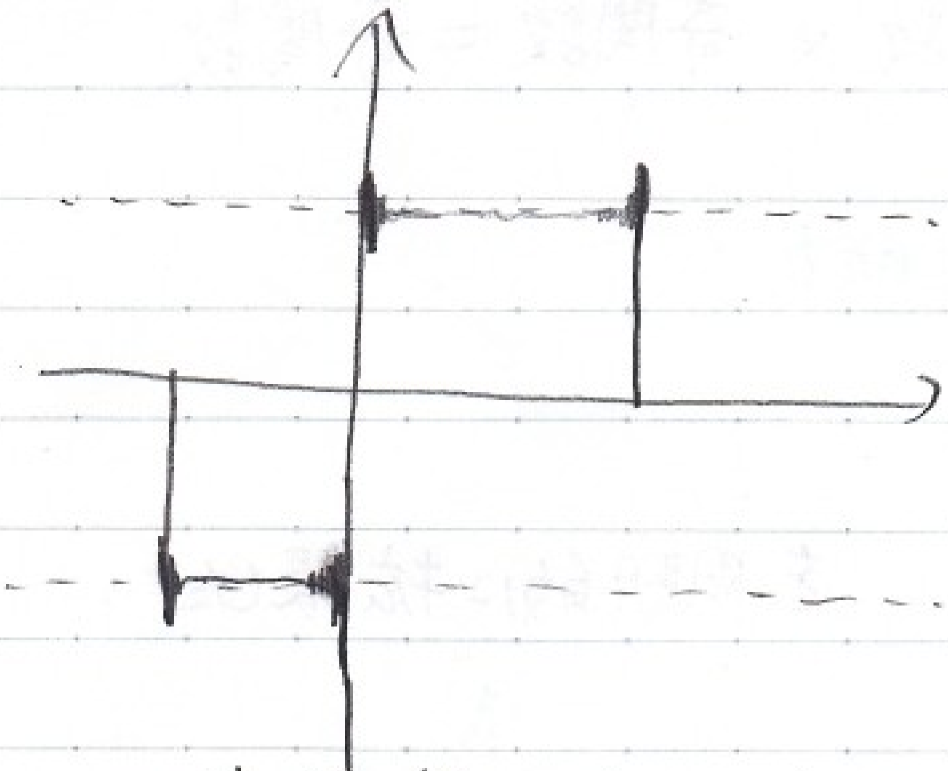
N = 6



N = 40



N = 200



不連続点があるときは. Nをどんなに大きくしても不連点の近傍で一定のずれが残る
これをギブス現象という.

"ずれ"を計算する
N：偶数で考える.

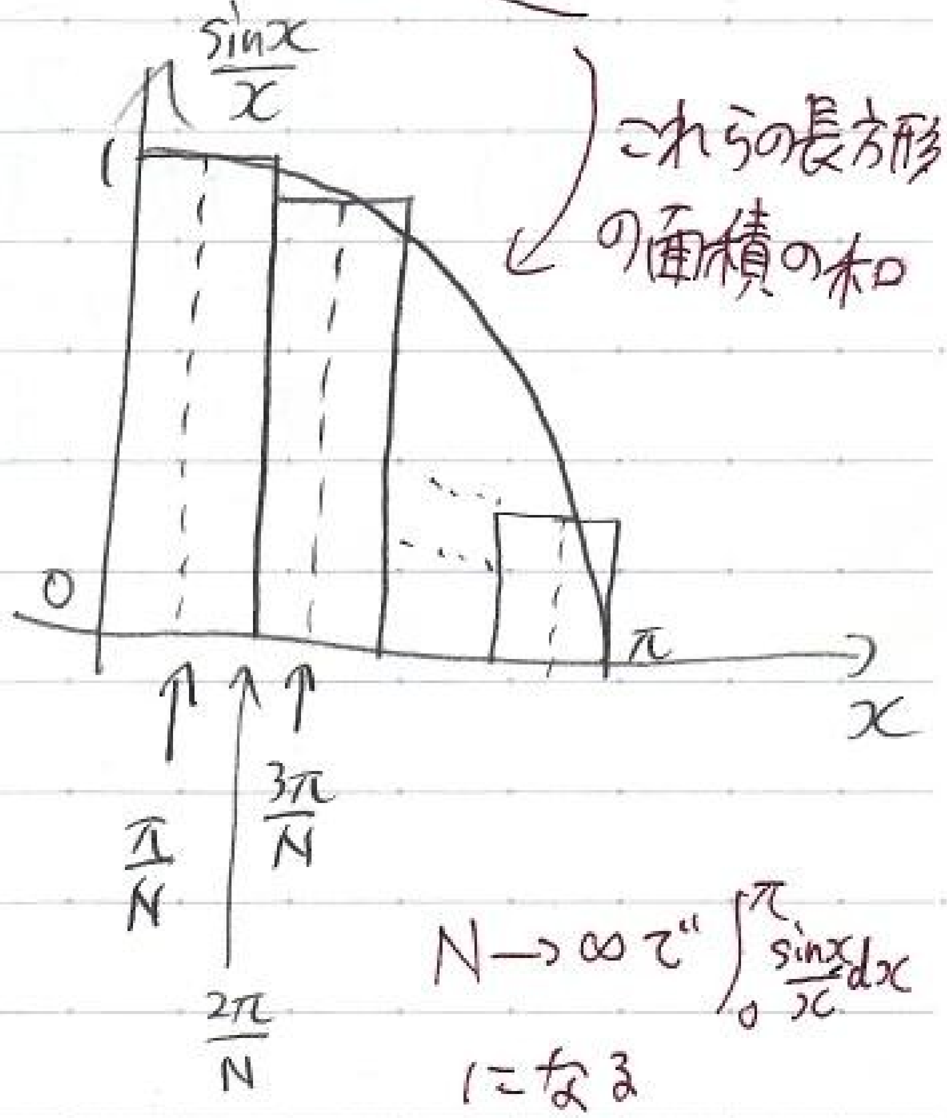
$$f_N\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{N} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{N} + \cdots + \frac{1}{N-1}\sin\frac{(N-1)\pi}{N}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\Bigl(\underbrace{\frac{2\pi}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{\frac{\pi}{N}} + \frac{2\pi}{N}\frac{\sin\frac{3\pi}{N}}{\frac{3\pi}{N}} + \cdots + \frac{2\pi}{N}\frac{\sin\frac{(N-1)\pi}{N}}{\frac{(N-1)\pi}{N}}}\Bigr)$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

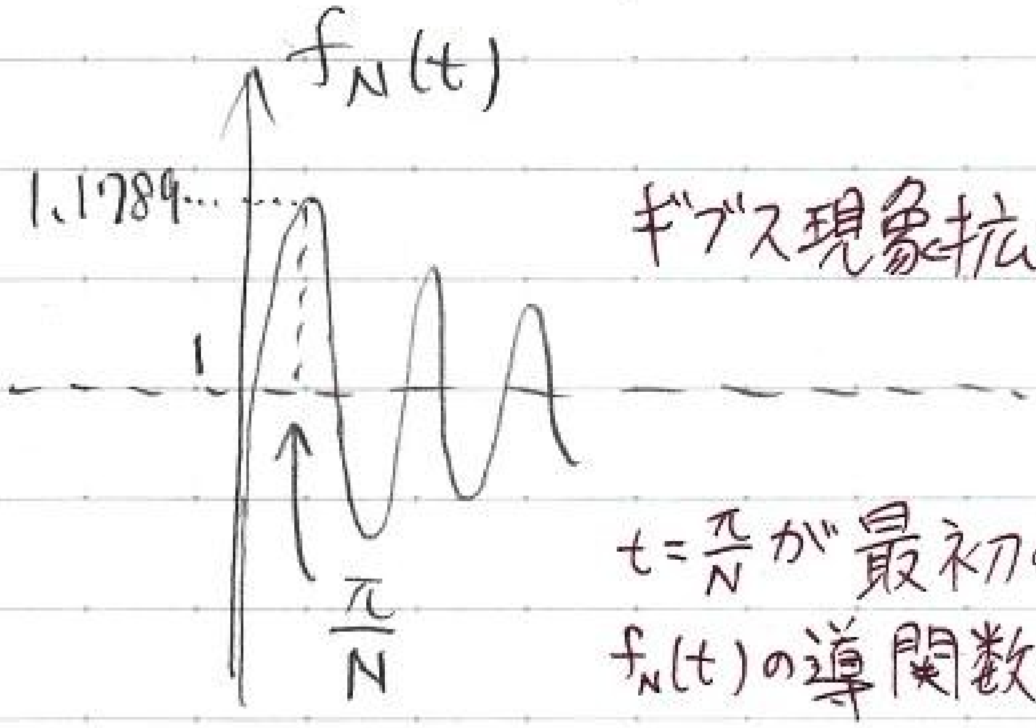
$$= \frac{2}{\pi}\cdot 1.851937\cdots$$

$$= 1.178979\cdots$$



これらの長方形の面積の和

$N\to\infty$で$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$になる



ギブス現象拡大図

$t=\frac{\pi}{N}$が最初の極大になることは
$f_N(t)$の導関数を調べればわかる(多分)

一般に、不連続点$t=t_0$での"とび"$f(t_0+0)-f(t_0-0)$がdである
周期$2T$の区分的C^1級関数$f(t)$について、

$$f_N\left(t_0\pm\frac{T}{N}\right) = f\left(t_0\pm\frac{T}{N}\right) \pm a\times\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx - \frac{1}{2}\right)$$

$$= f\left(t_0\pm\frac{T}{N}\right) \pm a\times 0.08949\cdots$$

であることが知られている。

証明おしえて

No. 6

Date

不連続点がなければギブス現象は起きない

fact $f(t)$を区分的C^1級な周期関数とする。

(i) $f(t)$が連続関数のとき

$f(t)$のフーリエ級数は$f(t)$に一様収束する。

(ii) $f(t)$が不連続点をもつとき

$f(t)$のフーリエ級数は不連続点を両端とする開区間において$f(t)$に各点収束するが一様収束しない。

フーリエ級数のだいじなお話はここまで

Def 区分的連続な周期関数$f(t)$のフーリエ級数展開が(※)のとき、

$$I_N := \int_{-T}^{T} \{f(t) - f_N(t)\}^2 dt$$

とおき、

$\lim_{N\to\infty} I_N = 0$をみたすとき、フーリエ級数は$f(t)$に平均収束するという。

平均収束は各点収束より弱い(多分)

fact 区分的C^1級の周期関数$f(t)$のフーリエ級数は$f(t)$に平均収束する。

Thm (パーセバルの等式)

区分的C^1級の周期$2T$の関数$f(t)$のフーリエ級数展開が(※)のとき、

$$\int_{-T}^{T} \{f(t)\}^2 dt = T\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right)$$

Pf $I_N = \int_{-T}^{T} \left(\{f(t)\}^2 - 2f(t)f_N(t) + \{f_N(t)\}^2 \right) dt$

$f_N(t)$の定義をいれる

$$= \int_{-T}^{T} \{f(t)\}^2 dt - 2\int_{-T}^{T} f(t) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n\pi}{T} t \right) \right\} dt$$

$$+ \int_{-T}^{T} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n\pi}{T} t \right) \right\} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{N} \left(a_m \cos \frac{m\pi}{T} t + b_m \sin \frac{m\pi}{T} t \right) \right\}$$

$$= \int_{-T}^{T} \{f(t)\}^2 dt - 2\left(\frac{a_0^2}{2} T + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 T + b_n^2 T \right) \right) + \left(\frac{a_0^2}{2} T + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 T + b_n^2 T \right) \right)$$

$$= \int_{-T}^{T} \{f(t)\}^2 dt - T\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right)$$

$$\xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$ fact より

■

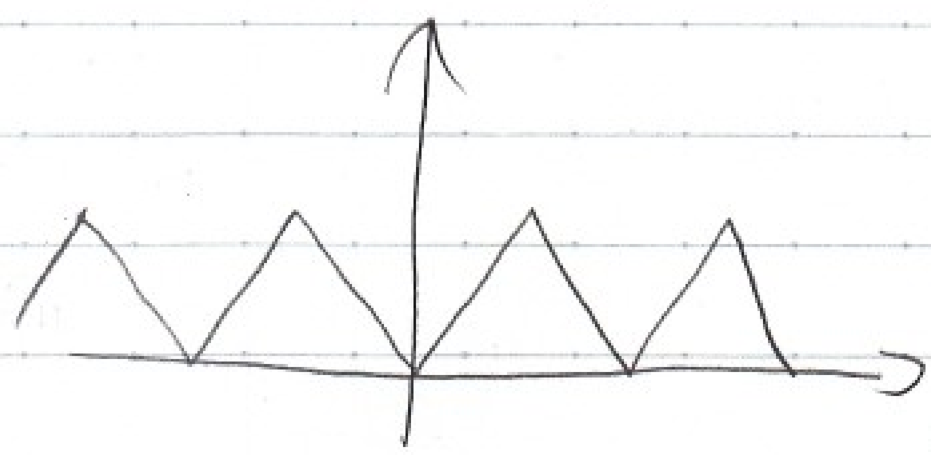
準備とフーリエ級数の定義を使う

例 $f(t) = |t| \quad (-1 < t \leq 1)$

$a_0 = 1$

$a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$

$b_n = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$



$$\int_{-1}^{1} \{f(t)\}^2 dt = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$ ← パーセバルの左辺

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$ ←パーセバルの右辺

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^4} \left(\frac{4}{1^4} + \frac{4}{3^4} + \frac{4}{5^4} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \right)$$

$$\therefore \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$