S2S 例会講義『対角化のこころ』問題 (作成:松田)

学籍番号: 名前:

$A \in M_n(\mathbb{C})$ の対角化の流れ

1. $|\lambda I - A| = \prod_{i=1}^{r}(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ と分解する．(根を求める)
2. 各固有値 λ_i に属する固有空間 V_{λ_i} の基底 $\mathbf{p}_{i1}, ..., \mathbf{p}_{id_i}$ を求める．
   $((A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を解く．ここで $d_i := \dim V_{\lambda_i})$
3. $\forall i, d_i = m_i$ のとき対角化可能であり，$P = (\mathbf{p}_{11} ... \mathbf{p}_{1m_1} ... \mathbf{p}_{r1} ... \mathbf{p}_{rm_r})$ として $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix}$ を得る．

(例題) 次の行列 A を対角化せよ：$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(略解) $|\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 5)$ となり，A は対角化可能．

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, V_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

より，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$ を得る． ■

(練習問題 1) 以下の行列が対角化可能かを判定し，可能ならば対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & -1 & 1 & \\ & 1 & -1 & \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 8 & & -6 & \\ & -4 & & 3 \\ 9 & & -7 & \\ & -6 & & 5 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 9 & 7 & -7 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(練習問題 2) $V = \{f \in \mathbb{C}[x] | \deg f \leq 2\}$ とおく．

写像 $F : V \to V$ を $F(f(x)) := (x^2 - x - 1)f''(x) + x^2 f'(0) + f(-1)$ で定める．

(1) F が $\mathbb{C}$-線型であることを示せ．

(2) 適当な基底をとって F の表現行列が対角化可能かを判定し，可能ならば対角化せよ．

略解

以下では所与の行列を A とおき $\chi(\lambda)=|\lambda I-A|$ とする．

裏面に収めるには行列が大き過ぎたので対角化可能なときの $P, P^{-1}AP$ は省略し，vector は横書きにした．

(練習問題 1)

(1) $\chi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$ より対角化可能, $V_2=\langle(5,2)\rangle, V_3=\langle(2,1)\rangle$.

(2) $\chi(\lambda)=\lambda^2, V_0=\langle(2,-3)\rangle$ より対角化不可能.
なお，$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ を得る.

(3) $\chi(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i)$ より対角化可能,
$V_{-1}=\langle(1,0,1)\rangle, V_i=\langle(3,1+i,1)\rangle, V_{-i}=\langle(3,1-i,1)\rangle$.

(4) $A^*=A$ より対角化可能.$\chi(\lambda)=\lambda^2(\lambda+2)(\lambda-2)$,
$V_0=\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle, V_{-2}=\langle(0,1,-1,0)\rangle, V_2=\langle(1,0,0,-1)\rangle$.

(5) $\chi(\lambda)=(\lambda+1)^4, V_{-1}=\langle(-1,0,0,1),(-1,0,1,0)\rangle$ より対角化不可能.
なお, $P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & \\ \hline & & & -1\end{array}\right)$
を得る.

(6) $\chi(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)^2, V_2=\langle(1,0,1,0),(0,1,0,2)\rangle$,
$V_{-1}=\langle(2,0,3,0),(0,1,0,1)\rangle$ より対角化可能.

(7) $\chi(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)^2, V_2=\langle(1,0,1,0)\rangle, V_{-1}=\langle(2,0,3,0)\rangle$ より対角化不可能．なお，
$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP=\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ \hline & & -1 & 1\\ & & & -1\end{array}\right)$ を得る.

(練習問題 2)

(1) $f,g\in\mathbb{C}[x], a\in\mathbb{C}$ に対し $(f+g)(a):=f(a)+g(a)$ であることと微分の線型性からしたがう.

(2) 基底 $(1,x,x^2)$ に関する F の表現行列は $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ であり，
$\chi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-(1+i))(\lambda-(1-i))$ より対角化可能.

$$V_1=\langle 1\rangle, V_{1+i}=\left\langle 1+(1-i)x-x^2\right\rangle, V_{1-i}=\left\langle 1+(1+i)x-x^2\right\rangle$$

となり，基底 $(1,1+(1-i)x-x^2,1+(1+i)x-x^2)$ に関する F の表現行列 $\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1+i & \\ & & 1-i\end{pmatrix}$ を得る.