3 項間漸化式と行列の標準化

kuttinpa

2014 年 2 月 5 日

このレジュメは、「この内容でだれか新歓講義してくれないかな〜」というのを目的にしています。

1　高校数学の復習

3 項間漸化式

$$a_{n+2} = sa_{n+1} + ta_n \tag{1}$$

を考える。これを解くときには、a_{n+2} を x^2、a_{n+1} を x、a_n を 1 でそれぞれ置き換えた式

$$x^2 = sx + t$$

つまり

$$x^2 - sx - t = 0 \tag{2}$$

の解を求めることから始めるのが通例だった。これを特性方程式と呼ぶ。

これは 2 次方程式なので 2 つの解 α と β を持つ。ここで $\alpha \neq \beta$ とすると

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

となる。ここから

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n(a_1 - \alpha a_0)$$
$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n(a_1 - \beta a_0)$$

がわかるので、あとはこの 2 式を a_{n+1} と a_n の連立方程式と見て解くと

$$a_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\left\{\alpha^n(a_1 - \beta a_0) - \beta^n(a_1 - \alpha a_0)\right\}$$

となり、一般項を得ることが出来る。ここで $\dfrac{a_1 - \beta a_0}{\alpha - \beta} = X, \dfrac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha - \beta} = Y$ とすると、この一般項は

$$a_n = X\alpha^n + Y\beta^n \tag{3}$$

の形をしていることが見えてくる。一般に次が言える。

Theorem 1.　N 項間漸化式の特性方程式が $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N-1}$ を解に持ち、いずれも重解でないとき、適当な数 $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ があって、

$$a_n = X_1\alpha_1^n + X_2\alpha_2^n + \cdots + X_{N-1}\alpha_{N-1}^n$$

と書ける。ここで各 X_i は n に依存しない定数であることに注意。

では特性方程式が重解を持つときはどうなるか？つまり元の漸化式が

$$a_{n+2} = 2\alpha a_{n+1} - \alpha^2 a_n \tag{4}$$

となっており、特性方程式が

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0 \tag{5}$$

となった場合について考える。このときは得られる式が

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \alpha^n (a_1 - \alpha a_0)$$

の一本だけとなり、前回のように連立方程式で一般項を求めることはできない。高校数学の教科書でも、こういったパターンが載っているものは少ない。

もちろんこのパターンも高校数学の範囲で対処が可能である。まず両辺を α^{n+1} で割る。
（$\alpha = 0$ のときは元の漸化式がそのまま一般項を与えているので、考えないこととする）

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha}$$

$\left\{ \dfrac{a_n}{\alpha^n} \right\}$ という数列が等差数列となることがわかるので、

$$\frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_0}{\alpha^0} + \frac{n(a_1 - \alpha a_0)}{\alpha}$$

$$a_n = \left\{ \frac{n(a_1 - \alpha a_0)}{\alpha} + a_0 \right\} \alpha^n \tag{6}$$

となり、一般項がわかった。$\dfrac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} = X, a_0 = Y$ と置くと、この一般項は

$$a_n = (Xn + Y)\alpha^n \tag{7}$$

の形をしている。

2　問題提起

ところで、式 (3) と (7) を見比べると、ちょっとした違和感を覚える。

$\alpha \neq \beta$ のときには $a_n = X\alpha^n + Y\beta^n$ が成立していたから、これだけを見て判断すれば、$\alpha = \beta$ になると一般項は $a_n = X\alpha^n + Y\alpha^n = (X + Y)\alpha^n$ となることが予想される。

ところが実際には $a_n = (Xn + Y)\alpha^n$ であり、なぜか $n\alpha^n$ という項が現れる。

これは直感に反しているように思えるが、どうしてこういった現象が起こるのだろうか。

3　行列を用いた漸化式の表示

ふたたび

$$a_{n+2} = sa_{n+1} + ta_n$$

について考える。行列の掛け算については既知とする。

$$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

とする。これは列ベクトルといって、ベクトルを「縦に成分を並べる」ことで表記する方法だが、1 行 2 列の行列だと思ってくれて構わない。

ここで、

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_{n+1} + ta_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_n \tag{8}$$

となるため、$A = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= Av_n \\ v_n &= A^n v_0 \end{aligned} \tag{9}$$

が成立する。見た目がとても簡単になった。あとは A^n を求めればよいのである。

4　行列の対角化

このセクションでは $x^2 - sx - t = 0$ の解を α と β $(\alpha \neq \beta)$ であるとする。

いわゆる「入試数学」において A^n を求める方法は

- 自力で A^n を予想し、数学的帰納法で証明する方法
- 特別な行列 P が問題文の誘導で与えられ、$P^{-1}AP$ を計算する方法

の 2 種類しかない。

大学ではもっぱら後者の方法が使用される (ただしこの P は自力で求める必要がある)。今回もこの方法を使おう。つまり、

$$\text{なんらかの } P \text{ を用いることで、} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ と変形できる}$$

ことを示す。このように対角成分にしか非ゼロの値が入っていない行列のことを**対角行列**といい、A に対して上記の $P^{-1}AP$ を求めることを**対角化**という。P は**対角化行列**と呼ばれる。

もしもこれが示されれば、

$$\begin{aligned} \left(P^{-1}AP\right)^n &= P^{-1}APP^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP \\ \left(P^{-1}AP\right)^n &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$A^n = P\left(P^{-1}AP\right)^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{10}$$

ここまでくれば式 (3) の成立はほぼ明らかである。

4.1　固有値と固有ベクトル

行列 A に対して、複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ と 0 でない列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ があり

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{11}$$

を満たす時、この λ を A の**固有値**、$\mathbf{x}$ を λ に属する A の**固有ベクトル**という。

この λ を求める方法について考えてみる。単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用いると $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$ であるため、式 (11) は

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = 0 \tag{12}$$

と変形される。これを満たすためには

$$det(\lambda E - A) = 0 \tag{13}$$

が必要である。

この式 $det(\lambda E - A)$ を A の**固有多項式**といい、$det(\lambda E - A) = 0$ を A の**固有方程式**という。固有方程式の解としての重複度をその固有値の**重複度**という。A が n 次の正方行列であれば、固有方程式は n 次方程式なので、固有値は重複度を含めて n 個存在する。

今回は $A = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なので、つまり

$$det\begin{pmatrix} \lambda - s & -t \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

が必要である。$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ であるから、この式は

$$\lambda(\lambda - s) - (-t) \cdot (-1) = 0$$
$$\lambda^2 - s\lambda - t = 0$$

となる。これが式 (2) と一致するのは偶然ではない。これの解は $\lambda = \alpha, \beta$ であったから、固有値は α と β の 2 つである。λ が式 (13) を満たすときに対応する $\mathbf{x}$ が必ず存在するかどうかはまだ証明していないが、とりあえず 1 本以上は存在することを認める。なお $\mathbf{x}$ が固有値 λ に属する固有ベクトルであれば、$c\mathbf{x}(c \in \mathbb{C}, c \neq 0)$ も λ に属する固有ベクトルであり、普通これらをまとめて 1 本と数える。

4.2 一次変換

少し高校数学の復習をする。

複数の列ベクトルを並べることで、行列を表現することができる。

例えば $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}$ のとき、$(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ となる。1 行 2 列の成分が $a_{2,1}$ となるので違和感があるが、とりあえずこのまますすめる。

さて、$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える。これを**基本ベクトル**という。すべてのベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

と、基本ベクトルを用いて表せる。

$A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ とする。ベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し、Av を対応させる写像を A による**一次変換**、あるいは A による線形写像という。

このとき

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1$$

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_2$$

であるから、

$$Av = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\left(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2\right) = x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2$$

となる。

以上のことから、A による一次変換は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の和で表されるベクトルを、$\mathbf{e}_1$ を $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{e}_2$ を $\mathbf{a}_2$ に置き換えたものへうつす写像となっている。図で表すと、こうなっている。

(図はまだ作っていない)

座標平面の目盛を、$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ から $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に取り替えたものになっている事がわかる。

また逆に、$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ にうつす一次変換は、$(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)$ という行列で表される事がわかる。この事実は次の対角化のセクションでも使う。

4.3 対角化

式 (10) の手前で出てきた式

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \tag{14}$$

について考える。

この式は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma & 0 \\ 0 & \beta\delta \end{pmatrix}$ であることを用いればすぐに導けるが、こう捉えることもできる。

行列 AB を用いた一次変換を考える。$(AB)v = A(Bv)$ であるから、AB という一次変換が v を写した先と、A という一次変換が Bv を写した先は同じである。つまり AB という一次変換は、B で表される一次変換を行った後、A で表される一次変換を行う操作と等しい。

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ による一次変換は $\mathbf{e}_1$ を $\alpha\mathbf{e}_1$ へ写す。また、$\alpha\mathbf{e}_1$ は $\alpha\left(\alpha\mathbf{e}_1\right) = \alpha^2\mathbf{e}_1$ に写されるから、$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ による一次変換は $\mathbf{e}_1$ を $\alpha^2\mathbf{e}_1$ に写す。

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n$ で表される一次変換は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ で表される一次変換を n 回繰り返したものであるから、$\mathbf{e}_1$ を $\alpha^n\mathbf{e}_1$ に写すことが上記の繰り返しでわかる。また同様にして $\mathbf{e}_2$ は $\alpha^n\mathbf{e}_2$ に写るから、$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ である。

また、こういったこともわかる。

$A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)$ が逆行列 A^{-1} を持つとする。$A^{-1}(Av) = Ev$ であるから (E は単位行列)、E が $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 自身に写すことを考えると、A^{-1} で表される一次変換は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ にそれぞれ写す。

さて、行列 A が固有値 α と β を持ち、α に属する固有ベクトルが v_α、β に属する固有ベクトルが v_β であるとする。このとき $\alpha = \beta$ であってもよいが、その時は v_α と v_β が異なる（一次独立である）必要がある。

ここで

$$P = (v_\alpha\ v_\beta)$$

として、$P^{-1}AP$ という行列を考える。$\left(P^{-1}AP\right)\mathbf{e}_1$ はどんなベクトルか？

P によって $\mathbf{e}_1$ は v_α にうつる。v_α は A の固有値 α に属する固有ベクトルなので、$Av_\alpha = \alpha v_\alpha$ である。そして P^{-1} によって v_α は $\mathbf{e}_1$ にうつるので、αv_α は $\alpha\mathbf{e}_1$ にうつる。

以上から $P^{-1}AP$ は $\mathbf{e}_1$ を $\alpha\mathbf{e}_1$ にうつす。同様にして

$$(P^{-1}AP)\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$$
$$(P^{-1}AP)\mathbf{e}_2 = \beta\mathbf{e}_2$$

であるから、前のセクションの最後で書いたことをふまえると、

$$(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となる。

多少長くなったが、このセクションの目的である対角化が達成された。A が 2 次行列でなく n 次の場合でも同様の議論ができるため、A が固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ をもち、それぞれが相異なる時、固有ベクトルを並べた行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化できる。これは定理 1 の成立を示している。よって式 (3) を示すことができた。

5　標準化と Jordan 標準形

$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は、対角化することができない。これを示そう。

もっとも原始的な方法は、$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として、$P^{-1}AP$ が対角行列となるような a, b, c, d が存在しないことを示すことである。

実際に計算すると $P^{-1}AP = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} \alpha(a-\alpha c)d + (b-\alpha d)a & -(b-\alpha d)^2 \\ (a-\alpha c)^2 & (a-\alpha c)b - \alpha(b-\alpha d)c \end{pmatrix}$ となり、対角行列になるためには $b = \alpha d, a = \alpha c$ が必要である。しかしこのような P には P^{-1} が存在せず、対角化不可能であることが示された。

ところで $\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は、式 (1) において $s = 2\alpha, t = -\alpha^2$ としたときに式 (8) で現れる行列である。つまり特性方程式が式 (5) のように重解をもつ場合は、式 (9) における A の対角化ができず、このままでは A^n を求めることができないということになる。この場合はどうすればいいかを考えよう。

5.1　対角化の条件

まず、なぜ対角化ができないかについて考察してみる。

A という行列が、$P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2)$ によって対角化される、すなわち $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が成り立っているとしよう。このとき $A = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}$ である。

このとき、P は $\mathbf{e}_1$ を $\mathbf{p}_1$ へうつす行列であるから、P^{-1} は $\mathbf{p}_1$ を $\mathbf{e}_1$ へうつす。このことを踏まえると

$$A\mathbf{p}_1 = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}\mathbf{p}_1 = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\mathbf{e}_1 = P\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = P(\alpha\mathbf{e}_1) = \alpha(P\mathbf{e}_1) = \alpha\mathbf{p}_1 \tag{15}$$

である。同様 $\mathbf{p}_2$ についても考えると

$$A\mathbf{p}_1 = \alpha\mathbf{p}_1$$

$$A\mathbf{p}_2 = \beta\mathbf{p}_2$$

となり、$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ は A の固有ベクトルであることがわかる。つまり、A が対角化されるとすると、その対角化行列 P は A の固有ベクトルを並べたものでなければいけないのである。

A が n 次の行列であるとき、A が対角化できる必要十分条件は、A の固有ベクトル $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_n}$ を並べた行列 $P = (v_{\alpha_1}\ v_{\alpha_2}\ \cdots\ v_{\alpha_n})$ であって、P^{-1} が存在するようなものが作れることである。

行列 $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ の逆行列が存在する必要十分条件は、これらの n 本のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ が一次独立であることである（これの証明はここでは述べないが、2 次の場合は容易に確かめることができる)。つまり以下が成り立つ。

Theorem 2.　A を n 次の行列とする。A が対角化できる必要十分条件は、A の一次独立な固有ベクトル $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_n}$ が存在することである。

ただし、$v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_n}$ が一次独立であれば、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の中に等しいものがあっても構わない。

さて、$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化可能かどうかをこの定理を用いて判定してみる。

$$det(\lambda E - A) = det\begin{pmatrix} \lambda - 2\alpha & \alpha^2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0$$

より、A の固有値 λ は $det(\lambda E - A) = 0$ の解だから、$\lambda = \alpha$ のみである。α に属する固有ベクトルを $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると、$\mathbf{x}$ は式 (12) を満たすから、

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = (\alpha E - A)\mathbf{x} = 0$$

$$(\alpha E - A)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha^2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha a + \alpha^2 b \\ -a + \alpha b \end{pmatrix} = 0$$

これを満たす $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ か、その定数倍だけである。

よって A の次数が 2 であるのに、一次独立な固有ベクトルが 1 本しか無いから、$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は対角化不可能である。

5.2 Jordan 標準系

では、A が対角化できないときに、どのように効率よく A^n を求めるかについて考える。簡単のため、まずは $A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について考える。これが対角化できないのは前セクションで確認済みである。

対角化できない行列 A に対しては、
「対角行列にできないとしても、なるべく $B = P^{-1}AP$ を B^n の計算が簡単になるような行列にしたい」
という態度で接することにする。B は対角行列に近い行列となる。

では、対角行列に近い行列とはなにか？どのような B であれば計算がしやすいのか？
まず、B の対角成分を抜き出した行列を X、$B - X = N$ とする。つまり X は対角行列である。$XN = NX$ であることを仮定すれば、

$$B^n = (X+N)^n = X^n + nX^{n-1}N + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{k-1}X^{n-k+1}N^{k-1} + {}_n\mathrm{C}_k X^{n-k}N^k + \cdots + N^n \tag{16}$$

ここで、もし $N^k = 0$ が成立すれば、

$$B^n = X^n + nX^{n-1}N + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{k-1}X^{n-k+1}N^{k-1} \tag{17}$$

となり、n が大きくなっても k 個の行列の足し算で計算できる（さらに $X^n, X^{n-1}, ..., X^{x-k+1}$ の計算はラクに行える)。

ある自然数 k について $N^k = 0$ が成り立つような行列を**冪零行列**という。N には様々な形があるが、対角行列と可換であることを考えると、

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

という、対角成分の 1 つ上に 1 が並んだ行列であれば条件を満たすし、計算もしやすいことがわかる。

5.3　一般の場合

一般に、

$$J(a,1)=\left(\begin{array}{c} a \end{array}\right),J(a,2)=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},J(a,3)=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}J(a,4)=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},\cdots$$

の形を **Jordan**(ジョルダン) **細胞**といい、Jordan 細胞をナナメに並べた

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1,n_1) & & & \\ & J(\alpha_2,n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\alpha_k,n_k) \end{pmatrix}$$

という形（上の式で、他の成分は全て 0）の行列を **Jordan 標準系**という。ここで、上の行列は、固有値が「α_1 が n_1 個、α_2 が n_2 個、$\cdots$、α_k が n_k 個」である行列の Jordan 標準系である (ただし α_1 と α_2 が同一のものである可能性はある)。

逆に、固有値が α_1 が n_1 個、$\cdots$、α_k が n_k 個である行列は、対角成分に α_1 を n_1 個、$\cdots$、α_k を n_k 個並べたものの 1 つ上に 1 をいくつか配置したものになる。

行列 A,B をナナメに並べて作った大きい行列 $C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ に関しては、$C^n=\begin{pmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{pmatrix}$ が成り立つので、Jordan 標準系のベキは簡単に計算できる。

最後にこの事実を述べておく（証明は省く）。対角行列も Jordan 標準系のひとつであることに注意しておきたい。

Theorem 3.　任意の正方行列 A に対して、ある P を用いることで $P^{-1}AP$ が Jodran 標準系になるようにできる。この操作を**標準化**と呼び、P を**標準化行列**、$P^{-1}AP$ を **A の Jordan 標準系**などと呼ぶ。

A の Jordan 標準系の対角成分には、A の固有値がその重複度の数だけ並ぶ。

5.4　元の漸化式の場合

話を式 (4) に戻そう。$A=\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について、A^n を求めるために A の Jordan 標準系を求めたい。

セクション 5.1 で確認したとおり、A の固有多項式は $\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2=0$ なので、固有値は α(重複度 2) である。つまり A の Jordan 標準系は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ か $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ のどちらかとなる。

さらに A は対角化不可能であるため、A の Jordan 標準系は

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

であることがこの時点でわかる。

より一般の行列では、最小多項式などの道具を用いて Jordan 標準形を確定させる。

最後に標準化行列 P を求める。

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ のとき $A = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}$ であるから、$P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2)$ とすると、式 (15) と同じように

$$A\mathbf{p}_1 = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}\mathbf{p}_1 = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\mathbf{e}_1 = P\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = P(\alpha\mathbf{e}_1) = \alpha(P\mathbf{e}_1) = \alpha\mathbf{p}_1$$

が成立するため、$\mathbf{p}_1$ は A の固有値 α に属する固有ベクトル、つまり $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ か、その定数倍である。

定数倍であればなんでもよいが、とりあえず $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ としておこう。このとき、$\mathbf{p}_2$ はどうなるか？

$A\mathbf{p}_2$ を計算すると、

$$\begin{aligned} A\mathbf{p}_2 &= P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}\mathbf{p}_2 = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\mathbf{e}_2 = P\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \\ &= P(\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2) = P\mathbf{e}_1 + \alpha(P\mathbf{e}_2) \\ &= \mathbf{p}_1 + \alpha\mathbf{p}_2 \end{aligned}$$

$$(A - \alpha E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

となる。

ちなみに $\mathbf{p}_1$ は $A\mathbf{p}_1 = \alpha\mathbf{p}_1$ を満たすから、$(A - \alpha E)\mathbf{p}_1 = 0$ である。つまり $\mathbf{p}_2$ は $(A - \alpha E)^2\mathbf{p}_2 = 0$ を満たす。一般の場合も $(A - \alpha E)^k\mathbf{p}_k = 0$ を解くことで必要な列ベクトルを求めることができる。

さて、$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ として式 (18) に代入すると、

$$(A - \alpha E)\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha^2 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \alpha^2 b \\ a - \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから、 $a - \alpha b = 1$ であればよい。例えば $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば条件を満たす。

以上から

$$P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば標準化ができることがわかった。実際、$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$ なので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

となり、求めたいものが現れている。

5.5　結論

長くなったが、3 項間漸化式の特性方程式が重解をもつ場合についての結論を得ることができた。

漸化式が $a_{n+2} = 2\alpha a_{n+1} - \alpha^2 a_n$ の場合、$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば $v_n = A^n v_0$ が成立する（式 (9))。

A^n は、$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ としたとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ であることを考えると

$$\begin{aligned} A^n &= \left(P \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}\right)^n = P \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} \cdots P \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n P^{-1} \end{aligned}$$

を満たす。$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$ は、そのまま計算して数学的帰納法でもよいが、$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を使うと、式 (16)(17) と同様に

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n + n \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

であり、P^{-1} と P の要素には n が含まれていないから、式 (7) の形になることが確定した。

さらに計算をすると

$$\begin{aligned} A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha^{n-1} & (1-n)\alpha^n \\ \alpha^n & -\alpha^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)\alpha^n & -n\alpha^{n+1} \\ n\alpha^{n-1} & (1-n)\alpha^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)\alpha^n & -n\alpha^{n+1} \\ n\alpha^{n-1} & (1-n)\alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$a_n = n\alpha^{n-1}a_1 + (1-n)\alpha^n a_0 = \left\{\frac{n(a_1 - \alpha a_0)}{\alpha} + a_0\right\}\alpha^n$$

となり、かなり長くなったが、ようやく式 (6) と同じ結果を得ることができた。

6 まとめ

数列の 3 項間漸化式は、行列を用いて考察することができた。

漸化式の特性方程式が重解を持たない場合と持つ場合では、その漸化式に対応する行列が対角化できるかできないかという決定的な差があり、一般項の形に現れる差はここから来ている。

ちなみに N 項間特性方程式の解 α が p 重解となった場合、(n に関する $p-1$ 次式以下の多項式) $\times\ \alpha^n$ が現れることが、同じ議論をすればわかる。さらに、このレジュメには載っていないもう少し複雑な議論をすれば「$p-1$ 次以下の多項式」でなく「$p-1$ 次の多項式」になることがわかるので、以下が成り立つ。

Theorem 4. N 項間特性方程式の特性方程式の解が $x=\alpha_1(p_1$ 重$)$,$x=\alpha_2(p_2$ 重$)$,$\cdots$,$x=\alpha_k(p_k$ 重$)$ となった場合、一般項 a_n は (p_i-1) 次の多項式 $f_i(x)$ を用いて

$$a_n = f_1(n){\alpha_1}^n + f_2(n){\alpha_2}^n + \cdots f_k(n){\alpha_k}^n$$

と表せる。

行列の対角化・標準化は、大学 1 回生で学ぶ「線型代数学」のメインとなる部分であり、これを用いて行列のベキを計算することは様々な分野で使われている。

おおまかなことはここに書いたとおりだが、A が一般の行列でなく特別な（= よい性質を持った）行列の場合は、対角化行列 P も特別な行列にできることがわかっており、これらの理論を通じて線形空間のさまざまな面白い性質に触れることができる。