2018 解析 1 演習
第 1 回

2018 年 4 月 13 日

1　問題

1. 次の集合を求めよ

$$(1)\ \bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1+\frac{1}{n}) \quad (2)\ \bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1+\frac{1}{n}] \quad (3)\ \bigcup_{n=1}^{\infty}(0, 1-\frac{1}{n}) \quad (4)\ \bigcup_{n=1}^{\infty}(0, 1-\frac{1}{n}]$$

2. $X \neq \emptyset$ とする．X の部分集合全体からなる集合族 2^X は σ 加法族であることを示せ．また $\{\emptyset, X\}$ が σ 加法族であることを示せ.

3. X を非可算集合とする．$\mathcal{F} = \{A \subset X \mid A$ または A^cが高々可算 $\}$ と定めると $\mathcal{F}$ は σ 加法族となることを示せ.

4.X の部分集合列 $\{E_n\}$ に対して, 上極限集合 $\limsup_{n\to\infty} E_n$ と下極限集合 $\liminf_{n\to\infty} E_n$ はそれぞれ

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$$

で定義される. 以下の問いに答えよ.

(1)$\liminf_{n\to\infty} E_n \subset \limsup_{n\to\infty} E_n$ を示せ.

(2)X の部分集合 A, B に対して $E_{2n} = A, E_{2n-1} = B$ と置くとき,E_n の上極限集合と下極限集合はそれぞれ何か.

2　解答

1. 次の集合を求めよ

$$(1)\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,1+\frac{1}{n})\quad (2)\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,1+\frac{1}{n}]\quad (3)\bigcup_{n=1}^{\infty}(0,1-\frac{1}{n})\quad (4)\bigcup_{n=1}^{\infty}(0,1-\frac{1}{n}]$$

2.1　Answer

(1) $(0,1]$

Proof. $A := \bigcap_{n=1}^{\infty}(0,1+\frac{1}{n})$ とおく．
任意の n $\in \mathbb{N}$ に対して，　$(0,1] \subset (0,1+\frac{1}{n})$ であるので，

$$(0,1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(0,1+\frac{1}{n}) = A$$

逆に，$x \in A$ とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$0 < x < 1 + \frac{1}{n} \quad \cdots \quad (*)$$

もし，　$x > 1$ ならば，　$x - 1 > 0$ なので，アルキメデスの原理から，十分大きな $n_o \in \mathbb{N}$ に対し，

$$x - 1 > \frac{1}{n_0}\text{つまり}\quad x > 1 + \frac{1}{n_0}\text{となり，これは}\quad (*)\text{ に矛盾}$$

$\therefore 0 < x \leq 1$ つまり，　$\therefore A \subset (0,1]$
以上から，A = (0,1]　□

(2) $(0,1]$ (1) と同様の議論をすれば良い．

(3) $(0,1)$

Proof. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty}(0,1-\frac{1}{n})$ とおく．
任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(0,1-\frac{1}{n}) \subset (0,1)$ なので，

$$A \subset (0,1)$$

逆の包含関係を示す．$0 < x < 1$ ならば，　$1 - x > 0$ より，十分大きな $n \in \mathbb{N}$ をとって，

$$1 - x > \frac{1}{n}$$

$$\therefore 0 < x < 1 - \frac{1}{n}$$

なので

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(0,1-\frac{1}{n})$$

よって
$$(0,1) \subset A$$
両方の包含関係が示せたので $(0,1) = A$

$\square$

(4) $(0,1)$

Proof. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty}(0, 1-\frac{1}{n}]$ とおく．
任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(0, 1-\frac{1}{n}] \subset (0,1)$ なので，
$$A \subset (0,1)$$
一方
$$\begin{aligned}(0,1) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(0, 1-\frac{1}{n}) \quad (\because (3) \text{ の結果}) \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(0, 1-\frac{1}{n}] = A\end{aligned}$$
以上から両方の包含関係が示せたので $(0,1) = A$ $\square$

2.2

2. $X \neq \emptyset$ とする．X の部分集合全体からなる集合族 2^X は σ 加法族であることを示せ．また $\{\emptyset, X\}$ が σ 加法族であることを示せ．

2.2.1 Answer

(1)2^X について，σ 加法族の 3 つの定義を満たしているか確認する．
(i) $\emptyset \in 2^X (\because$ 集合 X は空集合を含む)
(ii) $A \in 2^X$ の時，A^c も X の部分集合なので，$A^c \in 2^X$
(iii)$A_n \in 2^X (n \in \mathbb{N})$ の時，
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X \mid \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } x \in A_n\}$$
は X の部分集合なので，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in 2^X$
よって 2^X は σ 加法族．
(2) $\{\emptyset, X\}$ について，σ 加法族の 3 つの定義を満たしているか確認する．
(i) $\emptyset \in \{\emptyset, X\}$
(ii)$A \in \{\emptyset, X\}$ とする，この時，$A = \emptyset$,or $A = X$
$A = \emptyset$ ならば　$A^c = X \in \{\emptyset, X\}$
$A = X$ ならば　$A^c = \emptyset \in \{\emptyset, X\}$

$\therefore A^c \in \{\emptyset, X\}$
(iii)$A_n \in \{\emptyset, X\}(n \in \mathbb{N})$ とする
この時，全ての $n \in \mathbb{N}$ について，$A_n = \emptyset$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \in \{\emptyset, X\}$
一方，$A_n = X$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在すれば
$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \in \{\emptyset, X\}$
故に $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \{\emptyset, X\}$
よって $\{\emptyset, X\}$ は σ 加法族.

2.3

3. X を非可算集合とする．$\mathcal{F} = \{A \subset X \mid A$ または A^cが高々可算 $\}$ と定めると $\mathcal{F}$ は σ 加法族となることを示せ.

2.3.1 Answer

$\mathcal{F}$ が σ 加法族の 3 つの定義を満たしているか確認する.
(i) $\emptyset$ は高々可算集合なので $\emptyset \in \mathcal{F}$
(ii)$A \in \mathcal{F}$ とする，この時 A または A^c は高々可算なので　$A^c \in \mathcal{F}$
(iii) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N})$ とする．　$A := \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ と置く.
もし全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n が高々可算ならば $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も高々可算，よって $A \in \mathcal{F}$
一方で，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して．A_{n_0} が高々可算でないとすると，$A_{n_0} \in \mathcal{F}$ から ${A_{n_0}}^c$ は高々可算である.
De Morgan の法則より，$A^c = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c \subset {A_{n_0}}^c$
したがって A^c は高々可算.
以上から，$A \in \mathcal{F}$

2.4

4.X の部分集合列 $\{E_n\}$ に対して, 上極限集合 $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} E_n$ と下極限集合 $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} E_n$ はそれぞれ

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$$

で定義される. 以下の問いに答えよ.
(1)$\displaystyle\liminf_{n\to\infty} E_n \subset \limsup_{n\to\infty} E_n$ を示せ.
(2)X の部分集合 A, B に対して $E_{2n} = A, E_{2n-1} = B$ と置くとき,E_n の上極限集合と下極限集合はそれぞれ何か.

2.4.1 Answer

(1)

Proof. $A := \varliminf_{n\to\infty} E_n$, $B := \varlimsup_{n\to\infty} E_n$ とおく．

A の定義から，任意の $x \in A$ に対し，$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$ より，ある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，$x \in \bigcap_{n=k_0}^{\infty} E_n$

ここで $\bigcap_{n=k_0}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$

$\therefore x \in \bigcap_{n=k_0}^{\infty} E_n \subset \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \varlimsup_{n\to\infty} E_n = B$

$\therefore A \subset B$

□

(2) 答　$\varliminf_{n\to\infty} E_n = A \cap B$,　$\varlimsup_{n\to\infty} E_n = A \cup B$

Proof. (i)下極限 $\varliminf_{n\to\infty} E_n$について示す．

$x \in \varliminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$ とすると

ある k_0 に対し，　$x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$　$\therefore x \in E_n$ $(n \geq k_0)$

$n \geq k_0$ の下で，n が偶数の時，$x \in A$ で，n が奇数の時，$x \in B$

$\therefore x \in A \cap B$

よって $\varliminf_{n\to\infty} E_n \subset A \cap B$

逆の包含関係を示す, 各 n について, E_nは A または B のいずれかなので，　$A \cap B \subset E_n$

故に $A \cap B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n = \varliminf_{n\to\infty} E_n$

以上から両方の包含関係が示せたので，$\varliminf_{n\to\infty} E_n = A \cap B$

(ii) $\varlimsup_{n\to\infty} E_n$について示す．

各 n について，E_nは A または B のいずれかなので $E_n \subset A \cup B$

{ (i) (ii) を通して常に　$A \cap B \subset E_n \subset A \cup B$ }

よって　$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = A \cup B$

逆の包含関係を示す．　$x \in A \cup B$ とすると，$x \in A$ または　$x \in B$

つまり $x \in E_{2n}$または $x \in E_{2n-1}$

したがって任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，$x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$

$\therefore x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \varlimsup_{n\to\infty} E_n$

以上から両方の包含関係が示せたので，$\varlimsup_{n\to\infty} E_n = A \cup B$

□