解析学 演習問題 1 解答

2017 年 10 月 21 日

1 1.1

$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $C^1[0,1]$ の関数列だから、微分積分学の基本定理より、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad g_n(x) = g_n(0) + \int_0^x g_n'(t)dt$$

となる。よって、

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(0) + \int_0^x g_n'(t)dt \right)$$

である。ここで和を分配するために、$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(0)$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x g_n'(t)dt$ が (後者は任意の $x \in [0,1]$ に対して) 収束することを示す。仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{\infty} < \infty$ であり、したがって

$$\forall x \in [0,1], \quad \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| < \infty$$

となるから、特に $x = 0$ として $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(0)$ は絶対収束することが分かった。次に、$x \in [0,1]$ が任意に与えられたとする。

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,x], \quad |g_n'(t)| \leq \|g_n'\|_{\infty}$$

となるが、仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n'\|_{\infty} < \infty$ であるから、t によらない優級数で押さえられるので、$\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(t)$ は $[0,x]$ 上絶対一様収束する。従って、$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x g_n'(t)dt$ は収束し、さらにその値は $\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(t)dt$ に等しい。以上により、

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \quad f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x g_n'(t)dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(0) + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(t)dt \end{aligned}$$

である。後は上の式の最後の行が x について C^1 級であることを示せばよい。積分記号の中の $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(t)$ について、部分和は連続関数であり、$[0,x]$ 上一様に収束するので、$[0,x]$ 上の連続関数である。そこで微分積分学の基本定理から、

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)$$

となり、最後の行は x について微分可能である。さらに $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)$ も、仮定 $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n'\|_\infty < \infty$ から連続関数の一様収束極限となり、連続である。したがって導関数は連続で、$f \in C^1[0,1]$ かつ $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)$ である。

2　1.2

$f \in C[0,1]$ であることを示す。$\forall x \in [0,1], |\sin(n\pi x)| \leq 1$ だから、

$$\forall x \in [0,1], \quad |a_n \sin(n\pi x)| \leq |a_n|$$

となる。仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ だから、x によらない優級数で押さえられるので、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$ は $[0,1]$ 上一様収束する。部分和は連続だから、$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$ は $[0,1]$ 上連続である。次に、

$$\forall (t,x) \in (0,\infty) \times [0,1], \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

を示す。そのためには、

$$\forall \delta > 0, \quad \forall (t,x) \in [\delta,\infty) \times [0,1], \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

を示せば十分である。$\delta > 0$ が任意に与えられたとする。$u(t,x)$ は $[\delta,\infty) \times [0,1]$ において x について C^2 級であり、また t について C^1 級であることを示す。$h_n(t,x) = a_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$ として関数列 $\{h_n(t,x)\}_{n=1}^{\infty}$ を定める。

$$\frac{\partial}{\partial x} h_n(t,x) = n\pi a_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \cos(n\pi x)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_n(t,x) = -n^2\pi^2 \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

となる。これらを評価する。ここで、

$$\|h_n\|_\infty \coloneqq \sup_{(t,x) \in [\delta,\infty) \times [0,1]} |h_n(t,x)|$$

として $\|\cdot\|_\infty$ を定める。このとき、x, t の一方を固定し、もう一方の関数と見た時の sup ノルムをそれぞれ $\|h_n(\cdot,x)\|_\infty, \|h_n(t,\cdot)\|_\infty$ と書くことにすると、

$$\forall x \in [0,1], \quad \|h_n(\cdot,x)\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty$$
$$\forall t \in [\delta,\infty), \quad \|h_n(x,\cdot)\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty$$

が成り立つことに注意する。まず $\{h_n(t,x)\}_{n=1}^{\infty}$ について、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (t,x) \in [\delta,\infty) \times [0,1], \quad |h_n(t,x)| \leq |a_n|$$

となる。従って、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|h_n\|_\infty \leq |a_n|$$

である。ここで、仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ となる。従って、(t,x) によらない優級数で押さえられたので、任意の $t \in [\delta,\infty)$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t,x)$ は x の関数として $[0,1]$ 上一様収束し、任意の $x \in [0,1]$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t,x)$ は t の関数として $[\delta,\infty)$ 上一様収束する。次に、$\{\frac{\partial}{\partial x} h_n(t,x)\}_{n=1}^{\infty}$ について、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (t,x) \in [\delta,\infty) \times [0,1], \quad \left|\frac{\partial}{\partial x} h_n(t,x)\right| \leq n\pi \mathrm{e}^{-n^2\pi^2\delta} |a_n|$$

である。ここで、$\sum_{n=1}^{\infty} n\pi \mathrm{e}^{-n^2\pi^2\delta} < \infty$ および仮定の $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ から、$\sum_{n=1}^{\infty} n\pi \mathrm{e}^{-n^2\pi^2\delta}|a_n| < \infty$ となる。したがって、(t,x) によらない優級数で押さえられたので、任意の $t \in [\delta, \infty)$ に対して $\{\frac{\partial}{\partial x} h_n(t,x)\}_{n=1}^{\infty}$ は x の関数として $[0,1]$ 上一様収束する。次に、$\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_n(t,x)\}_{n=1}^{\infty}$ について、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (t,x) \in [\delta,\infty) \times [0,1], \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_n(t,x) \right| \leq n^2\pi^2 \mathrm{e}^{-n^2\pi^2\delta}|a_n|$$

となるが、上と同様にして最右辺の無限和は (t,x) によらず収束するので、任意の $t \in [\delta,\infty)$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_n(t,x)$ は x の関数として $[0,1]$ 上一様収束し、任意の $x \in [0,1]$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_n(t,x)$ は t の関数として $[\delta,\infty)$ 上一様収束する。以上により、前問と同様にして、$u(t,x)$ は x について C^2 級であり、

$$\forall (t,x) \in [\delta,\infty) \times [0,1], \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} h_n(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_n(t,x) \end{aligned}$$

となるが、任意の $x \in [0,1]$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_n(t,x)$ は t の関数として $[\delta,\infty)$ 上一様収束することを示しているので、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} h_n(t,x)$ もまたそうである。したがって、前問と同様にして $u(t,x)$ は t について C^1 級であり、

$$\forall (t,x) \in [\delta,\infty) \times [0,1], \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

が成立する。以上より、

$$\forall (t,x) \in [\delta,\infty) \times [0,1], \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

が示された。

$$\begin{gathered} \forall x \in [0,1], \quad u(0,x) = f(x) \\ \forall t \in [0,\infty) \quad u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{gathered}$$

であることは $u(t,x)$ の定義から明らかである。

3　1.3

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を (X, d) の Cauchy 列とし、その部分列 $\{x_{n(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in X$ に収束していると仮定する。$\epsilon > 0$ が任意に与えられたとする。$\{x_{n(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ が x に収束しているので、

$$\exists k_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq k_1, \quad \mathrm{d}(x_{n(k)}, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

となる。また、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列だから、

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall m,n \geq n_1, \quad \mathrm{d}(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

となる。そこで、$N = \max\{k_1, n_1\}$ として $N \in \mathbb{N}$ を取ると、

$$\forall l \geq N, \quad \mathrm{d}(x_l, x) \leq \mathrm{d}(x_l, x_{n(l)}) + \mathrm{d}(x_{n(l)}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

となるから、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も x に収束する。

4　1.4

例えば次が例である。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} & |x| > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$