解析学 演習問題 2 解答

問 1

(1)

$r < \infty$ の時、条件から、

$$\frac{p}{r}, \frac{q}{r} \geq 1, \quad \frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1$$

である。ここで、$|f|^r, |q|^r$ もまた可測関数だから、ヘルダーの不等式から

$$\int_X |f(x)g(x)|^r \mathrm{d}\mu \leq \left\{ \int_X |f(x)|^{r\frac{p}{r}} \right\}^{\frac{r}{p}} \left\{ \int_X |g(x)|^{r\frac{q}{r}} \mathrm{d}\mu \right\}^{\frac{r}{q}}$$

を得る。両辺の r 乗根を取って、結論の不等式を得る。$r = \infty$ の時、条件から $p = q = \infty$ である。この時、a.e.x で

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

となるから、

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

である。以上により、示された。

(2)

$\mu(X) < \infty$ より、任意の $q \geq 1$ に対して、

$$\|1\|_q = \left\{ \int_X 1 \mathrm{d}\mu \right\}^{\frac{1}{q}} = \{\mu(X)\}^{\frac{1}{q}} < \infty$$

となるので、$1 \in L^q(X, \mu)$ である。そこで、$r < p$ に対して

$$q = \frac{pr}{p - r}$$

とおくと、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, q \geq 1$ となる。$f \in L^p(X, \mu)$ が任意に与えられたとすると、$g = 1$ として (1) の不等式を用いて

$$\|f\|_r = \|f1\|_r \leq \|f\|_p \|1\|_q < \infty$$

従って $f \in L^r(X, \mu)$ であり、$L^p(X, \mu) \subset L^r(X, \mu)$ であることが示された。

問 2

$r < p < \infty$ のとき、$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^r$ が任意に与えられたとする。このとき、

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

を示せばよい。$a \in l^r$ より、

$$\|a\|_r = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

であるから、特に $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r < \infty$ となる。このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となるから、

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |a_n| < 1$$

となる。ここで $r < p$ だから $|a_n| < 1$ のとき $|a_n|^p < |a_n|^r$ であり、従って

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^p < \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^r$$

である。右辺は収束するから、左辺も収束する。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$$

となるから、

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

である。よって示された。次に、$r < p = \infty$ のとき、$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^r$ が任意に与えられたとする。

$$\|a\|_r = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

であるから、特に $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r < \infty$ となる。このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となるから、a は収束列である。収束列は有界だから、$a \in l^p = l^{\infty}$ となる。以上により $l^r \subset l^p$ であることが示された。

問 3

$f \in L^p(X,\mu)$ が任意に与えられたとする。f をはじめから非負実数値として証明すれば十分である。このとき、$L^p(X,\mu)$ に属する非負可測単関数の増大列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、f に L^p 収束するものが取れる。各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、f_n を

$$f_n = \sum_{k=0}^{m} c_{n,k}\chi_{A_{n,k}}, \quad c_{n,0} = 0, c_{n,k} > 0 (k \geq 1), \quad X = \sum_{k=0}^{m} A_{n,k}$$

と書くことにする。$f_n \in L^p(X,\mu)$ であるから、

$$\|f_n\|_p^p = \int_X |f_n(x)|^p \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} |c_{n,k}|^p \mu(A_{n,k}) < \infty$$

となる ($c_{n,0} = 0$ だから和は $k = 1$ から取っている)。したがって、$\mu(A_{n,k}) < \infty (k = 1, \ldots, m)$ である。よって、$1 \leq r < \infty$ を満たす r が任意に与えられたとすると、

$$\|f_n\|_r^r = \int_X |f_n(x)|^r \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} |c_{n,k}|^r \mu(A_{n,k}) < \infty$$

となるから、$f_n \in L^r(X,\mu)$ である。また、$\|f_n\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq m} |c_{n,k}| < \infty$ だから、$f_n \in L^\infty(X,\mu)$ である。以上により、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \in \cap_{1 \leq r \leq \infty} L^r(X,\mu)$ であり、$L^p(X,\mu)$ の中で $\cap_{1 \leq r \leq \infty} L^r(X,\mu)$ は稠密である。

問 4

(1)

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、$2^m \leq n < 2^{m+1}$ を満たす m を取ると、$k = n - 2^m$ として

$$\|f_n\|_p = \int_0^1 m^p \chi_{[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]}(x) \mathrm{d}\mu = \frac{m^p}{2^m}$$

となる。ここで $n \to \infty$ とすると $m \to \infty$ となるから、最右辺は 0 に収束するので、

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n\|_p = 0$$

となる。したがって、$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に L^p 収束する。

(2)

$x \in [0,1]$ が任意に与えられたとする。m の取り方から、自然数の列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ であって、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、$2^{m_k} \leq n_k < 2^{m_k+1}$ を満たす m_k をとると、$l = n_k - 2^{m_k}$ として

$$\chi_{[\frac{l}{2^{m_k}}, \frac{l+1}{2^{m_k}}]}(x) = 1$$

が成立するようなものが取れる。このとき、$f_{n_k}(x) = m_k$ となるが、$\lim_{k \to \infty} m_k = \infty$ より、

$$\forall R > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad |f_N(x)| > R$$

となるから、$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ は収束しない。

(3)

$\{f_{2^l}\}_{l=1}^\infty$ は $[0,1]$ 上ほとんど至るところ 0 に収束する。実際、$x \in (0,1]$ が任意に与えられたとすると、$0 < \frac{1}{2^m} < x$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在し、$l \geq m$ の時、

$$f_{2^l}(x) = l \chi_{[0, \frac{1}{2^l}]}(x) = 0$$

となる。従って、任意の $x \in (0,1]$ に対し、$\lim_{l \to \infty} f_{2^l}(x) = 0$ となる。