解析学 演習問題 3 解答

問 1

まず，

$$\|f\|_\infty \geq \sup_{\substack{g\in L^1(X,\mu)\\ \|g\|_1\leq 1}} \int_X |fg|\mathrm{d}\mu$$

を示す．$g \in L^1(X,\mu)$ で，$\|g\|_1 \leq 1$ となるものが任意に与えられたとする．ヘルダーの不等式から，

$$\int_X |fg|\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

となるので，示された．次に，

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{\substack{g\in L^1(X,\mu)\\ \|g\|_1\leq 1}} \int_X |fg|\mathrm{d}\mu$$

を示す．最初に示した不等式から，$\|f\|_\infty = 0$ の時は，

$$0 = \|f\|_\infty \geq \sup_{\substack{g\in L^1(X,\mu)\\ \|g\|_1\leq 1}} \int_X |fg|\mathrm{d}\mu$$

より，

$$\sup_{\substack{g\in L^1(X,\mu)\\ \|g\|_1\leq 1}} \int_X |fg|\mathrm{d}\mu = 0$$

だから，$0 \leq 0$ となって成立する．$\|f\|_\infty \neq 0$ とする．まず，X が σ 有限であることから，可測集合の上昇列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ であって，$\forall n \in \mathbb{N}, \mu(X_n) < \infty$ かつ $\cup_{n=1}^\infty X_n = X$ となるものが存在する．$0 < a < \|f\|_\infty$ が任意に与えられたとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$A_{n,a} \coloneqq X_n \cap \{|f| > a\}$$

として定めると，$\{X_n\}_{n=1}^\infty$ の取り方から，$\{A_{n,a}\}_{n=1}^\infty$ は増大列であり，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(A_{n,a}) < \infty$ であり，

$$\cup_{n=1}^\infty A_{n,a} = \{|f| > a\} \cap (\cup_{n=1}^\infty X_n) = \{|f| > a\}$$

となる．すると，$a < \|f\|_\infty$ だから $\mu(\{|f| > a\}) > 0$ であり，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mu(A_{n,a})}{\mu(\{|f| > a\})} \leq 1$$

が成り立つ．そこで

$$g_n(x) = \frac{\chi_{A_{n,a}}}{\mu(\{|f| > a\})}$$

として $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めると，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_X |g_n(x)| \mathrm{d}\mu = \frac{\mu(A_{n,a})}{\mu(\{|f| > a\})} \leq 1$$

より，$g_n \in L^1(X, \mu)$ であり，$\|g_n\|_1 \leq 1$ である．このとき，

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_X |fg_n| \mathrm{d}\mu &\geq \int_{A_{n,a}} |fg_n| \mathrm{d}\mu \quad (A_{n,a} \subset X) \\
&\geq a \int_{A_{n,a}} |g_n| \mathrm{d}\mu \quad (A_{n,a} = X_n \cap \{|f| > a\}) \\
&\geq a \frac{\mu(A_{n,a})}{\mu(\{|f| > a\})}
\end{aligned}$$

となるから，$\mu(A_{n,a}) \to \mu(\{|f| > a\}) (n \to \infty)$ より，

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |fg_n| \mathrm{d}\mu \geq a$$

である．$0 < a < \|f\|_\infty$ は任意に与えられていたから，

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{\substack{g \in L^1(X,\mu) \\ \|g\|_1 \leq 1}} \int_X |fg| \mathrm{d}\mu$$

を得る ($\|f\|_\infty = \infty$ のときは $\infty = \infty$ の意味で成立する)．以上により示された．

問 2

ここでは f を実数値関数として証明する (そのような指示があった)．$t \in I$ が任意に与えられたとする．0 に収束する $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ の数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, 任意に与えられたとする．仮定 (3) より，開区間 J と $g_J \in L^1(X, \mu)$ で，$t \in J \subset I$ かつ $J \times X$ 上で

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq |g_J(x)|$$

が成立するものが存在する．$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束するので，

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow t + h_n \in J$$

となる．仮定 (2) から，平均値の定理を用いて，

$$\forall n \geq N, \quad \exists \theta \in [0, 1], \quad \left| \frac{f(t + h_n, x) - f(t, x)}{h_n} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t + \theta h_n, x) \right|$$

である．ここで，$\forall n \geq N, t + h_n \in J$ より，

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t + \theta h_n, x) \right| \leq |g_J(x)|$$

となる．いま，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$g_n^t(x) := \frac{f(t+h_n, t) - f(t,x)}{h_n}$$

とすると，仮定 (1) から $\{g_n^t\}_{n=1}^{\infty}$ は可積分関数列であり，仮定 (2) より

$$\lim_{n\to\infty} g_n^t(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$$

である．このとき，

$$\begin{aligned}
\forall n \geq N, \quad \left|\frac{h(t+h_n) - h(t)}{h_n}\right| &= \left|\int_X g_n^t(x)\mathrm{d}\mu\right| \\
&\leq \int_X |g_n^t(x)|\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |g_J(x)|\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

であり，$g_J \in L^1(X,\mu)$ だから，$\{g_n^t\}_{n=1}^{\infty}$ に優収束定理を用いて，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{h(t+h_n) - h(t)}{h_n} &= \lim_{n\to\infty}\int_X g_n^t(x)\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} g_n^t(x)\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

を得る．したがって，h は $t \in I$ において微分可能である．t は任意に与えられていたから，h は I 上微分可能であり，

$$\forall t \in I, \quad h'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}\mu$$

となる．

問 3

(1)

これは計算するだけだから，省略．

(2)

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となる q を取る．まず，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t, x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

を示す．各 t に対して $\phi(t,x)$ は x の関数として C^∞ であり，さらに

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}\right)$$

の右辺は x についての多項式と $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}$ の積のいくつかの和になるから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}$ は x の関数として $L^q(\mathbb{R})$ に属する．従って，命題 1.2.6 から，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t, x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

が成立する．次に，

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

を示す．$x_0 \in \mathbb{R}$ が任意に与えられたとする．任意の $t \in (0,\infty)$ に対し，$t \in (a,b) \subset (0,\infty)$ となる開区間 (a,b) を一つ取る．このとき，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x_0 - y) = \left(\frac{\pi}{(2\pi t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x_0-y)^2}{2t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{(x_0-y)^2}{2t}}$$

だから，(a,b) 上で

$$\left(\frac{\pi}{(2\pi t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x_0-y)^2}{2t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{(x_0-y)^2}{2t}} f(y) \leq \left(\frac{\pi}{(2\pi a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x_0-y)^2}{2a^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{(x_0-y)^2}{2b}} f(y)$$

が成立する．ここで

$$\left(\frac{\pi}{(2\pi a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x_0-y)^2}{2a^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{(x_0-y)^2}{2b}}$$

は y の多項式と $\mathrm{e}^{-\frac{(x_0-y)^2}{2b}}$ の積だから，y について $L^q(\mathbb{R})$ に属する．$f \in L^p(\mathbb{R})$ だから，ヘルダーの不等式を用いると，上の不等式の右辺は y について $L^1(\mathbb{R})$ に属する．従って，$\phi(t, x_0 - y) f(y)$ は前問の仮定 (3) を満たす．仮定 (1) を満たすことも同様にして分かる．(2) を満たすことは明らかだから，前問の結果を適用して

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

を得る．以上の議論と (1) から，$u(t,x)$ も熱方程式の解である．

(3)

$$\psi(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}$$

とすると，$\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ であり，さらに

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \mathrm{d}x = 1$$

である．ここで $\varepsilon = \sqrt{2t}$ とおくと，

$$\psi_\varepsilon(x) \coloneqq \frac{1}{\varepsilon} \psi(\frac{x}{\varepsilon}) = \phi(t,x)$$

であり，$t \to +0$ のとき $\varepsilon \to 0$ である．すると定理 1.2.5 から

$$\lim_{t \to +0} \|u(t,\cdot) - f\|_p = \lim_{\varepsilon \to 0} \|\psi_\varepsilon * f - f\|_p = 0$$

となる．