第 4 回解答

1

問 1

(1)

まず，$p \neq 1$ の時を考える．$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ と書くと，ヘルダーの不等式から，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となる q に対し

$$\begin{aligned}|F(x+iy)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(t)}{t-x-iy} \right| dt \\ &\leq \|f\|_p \left\| \frac{1}{t-x-iy} \right\|_q\end{aligned}$$

となる．

$$\left| \frac{1}{t-x-iy} \right| = \frac{1}{\sqrt{(t-x)^2+y^2}}$$

だから，

$$\left\| \frac{1}{t-x-iy} \right\|_q = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{(t-x)^2+y^2}} \right)^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}$$

となる．$t - x = y \tan\theta$ と置換すると

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{(t-x)^2+y^2}} \right)^q dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos\theta|^q}{\cos\theta} \frac{y^q}{y} d\theta$$

となるが,

$$\left| \frac{|\cos\theta|^q}{\cos\theta} \right| = |\cos\theta|^{q-1} \leq 1, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

だから，積分は有限の値を取る．したがって

$$C := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos\theta|^q}{\cos\theta} d\theta$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
|F(x+iy)| &\leq C^{\frac{1}{q}} \frac{y^{\frac{1}{q}}}{y} \|f\|_p \\
&= C_p \frac{1}{y^{1-\frac{1}{q}}} \|f\|_p \quad (C_p \coloneqq C^{\frac{1}{q}} \text{ としている}) \\
&= C_p \frac{\|f\|_p}{y^{\frac{1}{p}}} \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ を用いた})
\end{aligned}
$$

を得るから，$F(z)$ は存在し，問題の不等式を得た．次に，$p=1$ の時を考える．ヘルダーの不等式から，

$$
\begin{aligned}
|F(x+iy)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(t)}{t-x-iy} \right| dt \\
&\leq \|f\|_p \left\| \frac{1}{t-x-iy} \right\|_\infty
\end{aligned}
$$

となる．

$$
\left| \frac{1}{t-x-iy} \right| = \frac{1}{\sqrt{(t-x)^2+y^2}} \leq \frac{1}{y}
$$

だから，

$$
\left\| \frac{1}{t-x-iy} \right\|_\infty \leq \frac{1}{y}
$$

となり，$C_p = 1$ として

$$
|F(x+iy)| \leq C_p \frac{\|f\|_p}{y}
$$

を得る．したがって $F(z)$ は存在し，問題の不等式を得た．

(2)

$\delta > 0$ が任意に与えられたとして，$D \coloneqq \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z = y > \delta\}$ において $F(z) = F(x+iy)$ が正則であることを示せばよい．$z = x+iy \in D$ が任意に与えられたとする．$z+h \in D$ となる任意の $h \in \mathbb{C}$ に対して，

$$
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)} dt
$$

となる．従って，

$$
\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(t)h}{(t-z)(t-z-h)} \right| dt
$$

である．ヘルダーの不等式から，

$$
\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(t)h}{(t-z)(t-z-h)} \right| dt \leq |F(x+iy)| \left\| \frac{h}{t-z-h} \right\|_\infty
$$

を得る．前小問の結果から，

$$
\exists C_p > 0, \quad |F(x+iy)| \leq C_p \frac{\|f\|_p}{y}
$$

が成立する．ここで C_p は p のみに依存する定数である．したがって，$z \in D$ から

$$|F(x+iy)| \leq C_p \frac{\|f\|_p}{\delta}$$

を得る．また，

$$\left|\frac{h}{t-z-h}\right| \leq \frac{|h|}{|\mathrm{Im}(t-z-h)|}$$

であり，$|\mathrm{Im}(t-z-h)| = |\mathrm{Im}(z+h)|$ および $z+h \in D$ から

$$\frac{|h|}{|\mathrm{Im}(t-z-h)|} \leq \frac{|h|}{\delta}$$

を得る．以上により

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{f(t)h}{(t-z)(t-z-h)}\right| dt \leq C_p \frac{\|f\|_p}{\delta}\frac{|h|}{\delta}$$

となるから，

$$\lim_{|h|\to 0}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt\right| = 0$$

となり，$F(z)$ は D において正則である．よって示された．

(3)

$$\phi(s) \coloneqq \frac{1}{\pi}\frac{1}{-s-i}$$

として ϕ を定めると，

$$\mathrm{Im}\phi(s) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+s^2}$$

であり，したがって

$$\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} \phi(s)ds = 1$$

となる．$\phi_y(s) \coloneqq \frac{1}{y}\phi(\frac{s}{y})$ とする．$z = x+iy \in \mathbb{C}$ に対し

$$\phi_y(x-t) = \frac{1}{y}\phi(\frac{x-t}{y}) = \frac{1}{t-x-iy} = \frac{1}{t-z}$$

である．したがって

$$F(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} \phi_y(x-t)f(t)dt = (\phi_y * f)(x)$$

となるが，f は実数値関数だから

$$\mathrm{Im}F(x+iy) = ((\mathrm{Im}\phi_y) * f)(x)$$

である．したがって，定理 1.2.5 より

$$\lim_{y\to+0}\left\|\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}F(\cdot+iy) - f\right\|_p = 0$$

を得る．

問 2

(1)

$\varepsilon > 0$ と $f \in L^p[a,b]$ が任意に与えられたとする．多項式近似定理から，ある多項式 $P(x)$ が存在して

$$\|f - P\|_p < \varepsilon$$

となる．そこで，P を $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ 係数の多項式で近似することを考える．

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0 \\ Q(x) &= r_0 + r_1 x + \ldots + r_n x^n, \quad r_0, \ldots, r_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \end{aligned}$$

とする．$c = \max\{|a|, |b|\}$ とおくと，任意の $x \in [a,b]$ に対して

$$\begin{aligned} |P(x) - Q(x)| &\leq \sum_{i=0}^{n} |a_i - r_i||x|^i \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} |a_i - r_i||c|^i \end{aligned}$$

となるので，各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し

$$|a_i - r_i| \leq \frac{\varepsilon}{(n+1)c^i}$$

となるように r_i を取ると，

$$\|P - Q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{n+1} \times (n+1) = \varepsilon$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} \|P - Q\|_p &= \left(\int_a^b |P(x) - Q(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_a^b \|P - Q\|_\infty^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon (b-a)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

となり，

$$\|f - Q\|_p \leq \|f - P\|_p + \|P - Q\|_p \leq \varepsilon(1 + (b-a)^{\frac{1}{p}})$$

である．以上により，$\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ 係数の多項式は $L^p[a,b]$ で稠密である．このような多項式全体は可算だから，$L^p[a,b]$ は可分である．

(2)

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f \in L^p[-n,n]$ を $[-n,n]$ の外では 0 として延長すれば，$f \in L^p(\mathbb{R})$ である．この意味で $L^p[-n,n]$ を $L^p(\mathbb{R})$ の部分空間とみなす．

$$\cup_{n=1}^{\infty} L^p[-n,n]$$

が $L^p(\mathbb{R})$ で稠密であることを示す．これが示されれば，前小問の結果から，各 $L^p[-n,n]$ は可分であり，従って $L^p(\mathbb{R})$ が可分であることが従う．$f \in L^p(\mathbb{R})$ が任意に与えられたとする．$\|f\|_p < \infty$ より，

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \left| \left(\int_{-n}^{n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \|f\|_p \right| < \varepsilon$$

となる．ここで f の $[-n,n]$ への制限は $L^p[-n,n]$ に属するから，特に $\cup_{n=1}^{\infty} L^p[-n,n]$ に属する．従って，$\cup_{n=1}^{\infty} L^p[-n,n]$ は $L^p(\mathbb{R})$ で稠密である．

問 3

(1)

背理法で証明する．$\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ を l^∞ の稠密な可算部分集合とする．$E \subset \mathbb{N}$ に対して，$a^E \in l^\infty$ を

$$a_n^E = \begin{cases} 0 & (n \notin E) \\ 1 & (n \in E) \end{cases}$$

として定める．

$$A \coloneqq \{a^E \mid E \subset \mathbb{N}\}$$

として A を定義すると，A は l^∞ の部分集合である．$E, F \subset \mathbb{N}, E \neq F$ の時，定め方から

$$\|a^E - a^F\|_\infty = 1$$

となる．今，$\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ は l^∞ の稠密な可算部分集合だから，

$$\forall E \subset \mathbb{N}, \quad \exists n_E \in \mathbb{N}, \quad \|a^E - x^{n_E}\|_\infty < \frac{1}{3}$$

となる．$E \subset \mathbb{N}$ に対してこのような $n_E \in \mathbb{N}$ を対応させる写像を考えると，自然数の部分集合全体は自然数より真に濃度が大きいから，この写像は単射ではない．すなわち，

$$\exists E, F \subset \mathbb{N}, \quad E \neq F, \quad n_E = n_F$$

となる．この時，

$$\|a^E - a^F\|_\infty \leq \|a^E - x^{n_E}\|_\infty + \|x^{n_F} - a^F\|_\infty < \frac{2}{3}$$

となるが，前述したとおり $E \neq F$ だから $\|a^E - a^F\|_\infty = 1$ であり，矛盾が生じる．よって，l^∞ は可分ではない．

(2)

$a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ に対し

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ n(n+1)(a_n - a_{n+1})x + (n+1)a_{n+1} - na_n & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

という関数 ($x = \frac{1}{n}$ の時 a_n となる折れ線) を対応させる写像を考える．対応先の関数は $L^\infty[0,1]$ に属する．この写像は明らかに線形であり，$\|f\|_\infty = \|a\|_\infty$ となるから，l^∞ は $L^\infty[0,1]$ に等長に埋め込まれる．l^∞ は可分でないから，$L^\infty[0,1]$ も可分ではない．