1

問 1

(1)

$n=0$ の時，

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t dt=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

$n\neq 0$ の時，

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\mathrm{e}^{-int}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\left[t\frac{\mathrm{e}^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-int}}{-in}dt\\&=\frac{\mathrm{e}^{-i2\pi n}}{-in}\\&=\frac{i}{n}\end{aligned}$$

となる．以上より

$$\hat{f}(n)=\begin{cases}\pi & n=0\\ \frac{i}{n} & n\neq 0\end{cases}$$

(2)

f の L^2 ノルムの二乗は

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 dt\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi}\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{8\pi^3}{3}\\&=\frac{4}{3}\pi^2\end{aligned}$$

となる．Parseval の等式から，

$$\|f\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right|^2$$

(1) と上の結果を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi^2&=\pi^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2\\&=\pi^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

である．

問 2

f のフーリエ係数を求める．$n = 0$ の時，f は奇関数だから

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = 0$$

$n \neq 0$ の時，

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \mathrm{e}^{-int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} t\mathrm{e}^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} -t\mathrm{e}^{-int} dt
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{-int} dt &= \left[t \frac{\mathrm{e}^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-int}}{-in} dt \\
&= \pi \frac{\mathrm{e}^{-int}}{-in} - \frac{1}{-n^2} \left[\mathrm{e}^{-int} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi i}{n} (-1)^n + \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{0} -t\mathrm{e}^{-int} dt &= - \int_{\pi}^{0} t\mathrm{e}^{int} dt \\
&= \int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{int} dt \\
&= \overline{\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{-int} dt} \\
&= -\frac{\pi i}{n} (-1)^n + \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{n^2} ((-1)^n - 1) \right) \\
&= \frac{1}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

以上をまとめると，

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} 0 & n : \text{even} \\ -\frac{2}{n^2 \pi} & n : \text{odd} \end{cases}$$

となる．最後に，絶対一様収束を示すには

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right|$$

が収束する事を示せばよいが，

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right| &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)^2\pi} \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\end{aligned}$$

だから，確かに収束する．

問 3

latex での記号が見つからないので，$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を T と書く．

(1)

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)e_n+\hat{f}(-n)e_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_T f(s)\mathrm{e}^{-ins}ds\mathrm{e}^{int}+\frac{1}{2\pi}\int_T f(s)\mathrm{e}^{ins}ds\mathrm{e}^{-int} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_T f(s)(\cos(ns)-i\sin(ns))ds(\cos(nt)+i\sin(nt)) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_T f(s)(\cos(ns)+i\sin(ns))ds(\cos(nt)-i\sin(nt)) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_T f(s)\cos(ns)ds\cos(nt)+\frac{1}{\pi}\int_T f(s)\sin(ns)ds\sin(nt) \\ &= a_n(f)c_n(t)+b_n(f)s_n(t)\end{aligned}$$

(2)

正規直交系であることは省略する．まず，完全であることを示す．整数 n に対し，

$$\mathrm{e}^{int}=\cos(nt)+i\sin(nt)=\begin{cases}1 & n=0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_n(t)+i\frac{1}{\sqrt{2}}s_n(t) & \text{otherwise}\end{cases}$$

だから，$\{1\}\cup\{\sqrt{2}c_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\sqrt{2}s_n\}_{n=1}^{\infty}$ の張る線形空間は $\{\mathrm{e}^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を含む．$\{\mathrm{e}^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(T)$ で完全だから，$\{1\}\cup\{\sqrt{2}c_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\sqrt{2}s_n\}_{n=1}^{\infty}$ も完全である．よって，示された．$f\in L^2(T)$ だから，f の Fourier 級数は f に L^2 収束する．ここで (1) より，任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{|n|\le N}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{-int} &= \hat{f}(0)+\sum_{n=1}^{N}(\hat{f}(n)\mathrm{e}^{-int}+\hat{f}(-n)\mathrm{e}^{int}) \\ &= \hat{f}(0)+\sum_{n=1}^{N}(a_n(f)c_n(t)+b_n(f)s_n(t))\end{aligned}$$

となる．また，定義から

$$\hat{f}(0) = \frac{a_0(f)}{2}$$

となるので，

$$\sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{-int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n(f)c_n(t) + b_n(f)s_n(t))$$

となる．左辺は $N \to \infty$ で f に L^2 収束するので，右辺もそうであり，

$$f = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)c_n + b_n(f)s_n)$$

が L^2 収束の意味で成り立つ．

(3)

任意の $f \in L^2(T)$ に対し，

$$f = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a_n(f)(\sqrt{2}c_n) + \frac{1}{\sqrt{2}}b_n(f)(\sqrt{2}s_n)\right)$$

が L^2 収束するので，Parseval の等式から任意の $f, g \in L^2(T)$ に対して

$$(f, g) = \frac{a_0(f)\overline{a_0(g)}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)}\right)$$

が成り立つ．

問 4

(1)

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_T (f*g)(t)\mathrm{e}^{-int}dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_T\int_T f(s)g(t-s)ds\mathrm{e}^{-int}dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_T\int_T f(s)g(t-s)\mathrm{e}^{-int}dsdt
\end{aligned}$$

となる．ここで $f, g \in L^1(T)$ より，

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_T\int_T |f(s)||g(t-s)|dtds = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty$$

だから，Fubini の定理を用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi^2}\int_T\int_T f(s)g(t-s)\mathrm{e}^{-int}dsdt &= \frac{1}{4\pi^2}\int_T\int_T f(s)g(t-s)\mathrm{e}^{-int}dtds \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_T\int_T f(s)g(t)\mathrm{e}^{-in(t+s)}dtds \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_T\int_T f(s)\mathrm{e}^{-ins}g(t)\mathrm{e}^{-int}dtds \\
&= \hat{f}(n)\hat{g}(n)
\end{aligned}
$$

を得る．

(2)

Young の不等式から，

$$\|f*g\|_2 \leq \|f\|_1\|g\|_2$$

であり，$f \in L^1(T), g \in L^2(T)$ より $f*g \in L^2(T)$ である．したがって，Parseval の等式から，

$$\|f*g\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f*g}(n)\right|^2$$

(1) から，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f*g}(n)\right|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right|^2|\hat{g}(n)|^2 \\
&\leq \|\hat{f}\|_\infty^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{g}(n)|^2
\end{aligned}
$$

再び Parseval の等式から，

$$\|\hat{f}\|_\infty^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{g}(n)|^2 = \|\hat{f}\|_\infty^2\|g\|_2^2$$

となる．したがって，

$$\|f*g\|_2 \leq \|\hat{f}\|_\infty\|g\|_2$$

である．