解析学 演習問題 第七回

問 1

(1)

まず積分が存在することを示す．$|z| < 1$ なる任意の z と任意の $t \in [0, 2\pi]$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{e}^{int} + z| &\leq 1 + |z| \\
|\mathrm{e}^{int} - z| &\geq 1 - |z|
\end{aligned}
$$

が成立する．したがって，

$$
\begin{aligned}
|F(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\mathrm{e}^{int} + z}{\mathrm{e}^{int} - z} \right| |f(t)| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + |z|}{1 - |z|} |f(t)| dt \\
&\leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \|f\|_1
\end{aligned}
$$

となり，$f \in L^1(T)$ だから積分は存在する．$|z| < 1$ で正則であることを示すには，任意の $0 < \delta < 1$ に対して，$|z| < \delta$ で正則であることを示せば十分である．$0 < \delta < 1$ が任意に与えられたとする．$|z| < \delta$ なる z が任意に与えられたとする．優収束定理を用いて z において F が正則であることを示す．$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を 0 でない複素数の列であって，0 に収束するような任意のものとする．必要ならば十分大きな n を取って $|z + h_n| < \delta$ としてよい．このとき，

$$
\frac{F(z + h_n) - F(z)}{h_n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{(\mathrm{e}^{it} - z - h_n)(\mathrm{e}^{it} - z)} dt
$$

となる．$|z + h_n|, |z| < \delta$ より

$$
\frac{1}{|(\mathrm{e}^{it} - z - h_n)(\mathrm{e}^{it} - z)|} \leq \frac{1}{(1 - \delta)^2}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{F(z + h_n) - F(z)}{h_n} \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|(\mathrm{e}^{it} - z - h_n)(\mathrm{e}^{it} - z)|} dt \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - \delta)^2} dt < \infty
\end{aligned}
$$

より

$$g_n(z) = \frac{F(z+h_n)-F(z)}{h_n}$$

に対して優収束定理を用いて，

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(z+h_n)-F(z)}{h_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{(\mathrm{e}^{it}-z)^2}dt$$

となる．$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ は任意だったから，F は z において正則である．以上により，F は $|z|<\delta$ において正則である．従って冒頭に述べた通り，F は $|z|<1$ において正則である．次に，

$$Re(F(r\mathrm{e}^{i\theta})) = P_r * f(\theta)$$

を満たすことを示す．

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{it}+r\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{it}-r\mathrm{e}^{i\theta}} &= \frac{1+r\mathrm{e}^{i(\theta-t)}}{1-r\mathrm{e}^{i(\theta-t)}} \\
&= \frac{1+r\mathrm{e}^{i(\theta-t)}}{1-r\cos(\theta-t)-ir\sin(\theta-t)} \\
&= \frac{1-r^2+i2r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}
\end{aligned}$$

だから，

$$Re\frac{\mathrm{e}^{it}+r\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{it}-r\mathrm{e}^{i\theta}} = P_r(\theta-t)$$

となる．したがって，

$$Re(F(r\mathrm{e}^{i\theta})) = P_r * f(\theta)$$

となる．

(2)

$F(z)$ において $f=1$ とすると，

$$ReF(r\mathrm{e}^{i\theta}) = P_r * f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt$$

となる．まず

$$F(r\mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{it}+r\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{it}-r\mathrm{e}^{i\theta}}dt$$

を求める．$z=\mathrm{e}^{it}$ として変数変換すると，C を正の向きの単位円周として

$$F(r\mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z+r\mathrm{e}^{i\theta}}{z(z-r\mathrm{e}^{i\theta})}dz$$

となる．被積分関数の C に囲まれる部分における極は $z=0, r\mathrm{e}^{i\theta}$ であり，どちらも 1 位である．留数はそれぞれ $-1, 2$ だから，留数定理より

$$F(r\mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i\times(-1+2)) = 1$$

を得る．したがって，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = ReF(r\mathrm{e}^{i\theta}) = 1$$

となる．

(3)

$\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする．

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 1$$

だから，$P_r(t) \geq 0$ と合わせていずれの場合においても

$$\|P_r * f - f\|_p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)\|R_t f - f\|_p dt$$

となる．ここで $f \in L^p(T)$ だから

$$\lim_{t\to+0}\|R_t f - f\|_p = 0$$
$$\lim_{t\to+0}\|R_{2\pi-t} f - f\|_p = 0$$

となる．したがって，

$$0 < \exists\delta_0 < \pi, \quad 0 < \forall t < \delta_0, \quad \|R_t f - f\|_p, \|R_{2\pi-t} f - f\|_p < \varepsilon$$

である．ここで，$\delta_0 < t < 2\pi - \delta_0$ のとき

$$1 - 2r\cos t + r^2 > 1 + r^2 - 2r\cos\delta_0$$

だから，

$$\begin{aligned}\lim_{r\to1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} P_r(t)dt &\leq \lim_{r\to1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta_0}dt \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\exists r_{\delta_0} > 0, \quad 1 - r_{\delta_0} < \forall r < 1, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} P_r(t)dt < \varepsilon$$

となる．よって，$1 - r_{\delta_0} < r < 1$ の時，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)\|R_t f - f\|_p dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta_0} P_r(t)\|R_t f - f\|_p dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} P_r(t)\|R_t f - f\|_p dt + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\delta_0}^{2\pi} P_r(t)\|R_t f - f\|_p dt \\ &< \varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} P_r(t)dt \times 2\|f\|_p + \varepsilon \\ &= \varepsilon(2 + \|f\|_p)\end{aligned}$$

となるから，

$$\lim_{r\to1-0}\|P_r * f - f\|_p = 0$$

である．

問 2

(1)

$t \in [-\pi, \pi]$ に対して $\tilde{f}(t) = f(|t|)$ として $\tilde{f}$ を定める．f は $[0, \pi]$ 上 C^1 級だから，$\tilde{f} \in C(T)$ かつ $\tilde{f}$ は区分的に C^1 級である．したがって，$\tilde{f}$ の Fourier 級数展開は $\tilde{f}$ に絶対一様収束する．$\tilde{f}$ が偶関数であることに注意して Fourier 係数を求める．

$$
\begin{aligned}
\hat{\tilde{f}}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\mathrm{e}^{int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \tilde{f}(t)(\mathrm{e}^{-int} + \mathrm{e}^{int})dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \tilde{f}(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{d_n}{2}
\end{aligned}
$$

となる．$d_n = d_{-n}$ より

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\tilde{f}}(n)\mathrm{e}^{int} &= \frac{d_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int}) \\
&= \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(nt)
\end{aligned}
$$

となる．これが $\tilde{f}$ に絶対一様収束する．特に $[0, \pi]$ 上で $f = \tilde{f}$ となる事から，

$$
f(t) = \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(nt)
$$

が $[0, \pi]$ 上で絶対かつ一様収束する．

(2)

$f(t) = t$ として d_n を求める．

$$
d_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \pi
$$

$n \geq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
d_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n}dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}
\end{aligned}
$$

だから，$n \geq 1$ に対して

$$d_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k-1)^2} & n = 2k-1 \end{cases}$$

となる．したがって，

$$f(t) = \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(nt)$$

が $[0,\pi]$ 上絶対一様収束することにより，

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$$

が $t \in [0,\pi]$ で成立する．

(3)

正規直交系であることは省略する．完全であることを示す．$f_0 \in L^2[0,\pi], \varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする．$C^1[0,\pi]$ は $L^2[0,\pi]$ で稠密であるから，

$$\exists f \in C^1[0,\pi], \quad \|f_0 - f\|_2 < \varepsilon$$

となる．すると前問までの結果から，$\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\} \cup \{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ の張る線形空間の元 g であって，$\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ となるものが存在する．

$$\begin{aligned} \|f-g\|_2^2 &= \int_0^\pi |f(x)-g(x)|^2 dx \\ &\leq \|f-g\|_\infty^2 \int_0^\pi dx \\ &\leq \pi\varepsilon^2 \end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned} \|f_0 - g\|_2 &\leq \|f_0 - f\|_2 + \|f-g\|_2 \\ &< \varepsilon + \sqrt{\pi}\varepsilon \\ &= \varepsilon(1+\sqrt{\pi}) \end{aligned}$$

である．したがって，$\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\} \cup \{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ は $L^2[0,\pi]$ の完全正規直交系である．

問 3

$f(t) = t$ とする．f の Fourier 係数は

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t dt = \pi$$

$n \neq 0$ のとき

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\mathrm{e}^{-int} dt = \frac{i}{n}$$

となるから，f の Fourier 級数展開は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{int} = \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}(\mathrm{e}^{int} - \mathrm{e}^{-int})$$
$$= \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$$

である．これが f に $(0, 2\pi)$ 上各点収束する事を示す．$t_0 \in (0, 2\pi)$ が任意に与えられたとする．t_0 に対し Dini 条件

$$\exists\delta > 0, \quad \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(t+t_0) - f(t_0)|}{|t|} dt < \infty$$

が成立することを示せばよい．$\delta = \min\{t_0, 2\pi - t_0\}$ とすると，$[-\delta, \delta]$ 上で

$$|f(t+t_0) - f(t_0)| = |t + t_0 - t_0| = |t|$$

となるので，

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(t+t_0) - f(t_0)|}{|t|} dt = \int_{-\delta}^{\delta} dt < \infty$$

となり，確かに Dini 条件が満たされる．したがって，Fourier 級数は $(0, 2\pi)$ 上 f に各点収束し，

$$t = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$$

が任意の $t \in (0, 2\pi)$ で成立する．