解析学２　演習問題　第８回

問１

(1)

$$\widehat{f(ax)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(ax)dx$$

ここで $y = ax$ と置換すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(ax)dx &= \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-iy\frac{\xi}{a}} f(y)dy \\ &= \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\xi}{a})\end{aligned}$$

となる．次に，

$$\widehat{f(x+b)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x+b)dx$$

を計算する．$x + b = y$ と置換すると，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x+b)dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i(y-b)\xi} f(y)dy \\ &= \mathrm{e}^{ib\xi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-iy\xi} f(y)dy \\ &= \mathrm{e}^{ib\xi}\hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

となる．以上により，

$$\begin{aligned}\widehat{f(ax)}(\xi) &= \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\xi}{a}) \\ \widehat{f(x+b)}(\xi) &= \mathrm{e}^{ib\xi}\hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

である．

(2)

$$-\frac{ax^2+2bx}{2} = -\frac{a}{2}\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b^2}{2a}$$

だから

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{ax^2+2bx}{2}} \mathrm{e}^{-ix\xi} dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b^2}{2a}} \mathrm{e}^{-ix\xi} dx \\ &= \mathrm{e}^{\frac{b^2}{2a}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}\left(x+\frac{b}{a}\right)^2} \mathrm{e}^{-ix\xi} dx\end{aligned}$$

ここで $\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{a}\right)=y$ と置換すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}\left(x+\frac{b}{a}\right)^2} \mathrm{e}^{-ix\xi} dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{e}^{-iy\frac{\xi}{\sqrt{a}}} \mathrm{e}^{i\frac{b}{a}\xi} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{e}^{i\xi\frac{b}{a}} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{e}^{i\xi\frac{b}{a}} \sqrt{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2a}}\end{aligned}$$

となるから，

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{ax^2+2bx}{2}} \mathrm{e}^{-ix\xi} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \mathrm{e}^{\frac{(b+i\xi)^2}{2a}}$$

を得る．

問 2

(1)

一つ目の積分について，$\xi>0$ の時の半円の上の積分の評価のみ書く．$z=r\mathrm{e}^{i\theta}$ の置換により

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi r\mathrm{e}^{i\theta}}}{r\mathrm{e}^{i\theta}-ia} ri\mathrm{e}^{i\theta} d\theta$$

となるから，この積分の絶対値は

$$\int_{\pi}^{2\pi} \left| \frac{r\mathrm{e}^{\xi r\sin\theta}}{r\mathrm{e}^{i\theta}-ia} \right| d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\xi r\sin\theta}}{\sqrt{r^2+a^2}} d\theta$$

で上から評価できる．$\theta\in(\pi,2\pi)$ において $\sin\theta<0$ だから，$r\to\infty$ とすると右辺の被積分関数は 0 に収束する．また，被積分関数は $[\pi,2\pi]$ において上から 1 で評価できるので，優収束定理から，$r\to\infty$ とすると右辺の積分は 0 に収束する．したがって，半円の上の積分は 0 に収束する．他の場合の評価も同様で，

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x-ia} dx = \begin{cases} 0 & \xi>0 \\ 2\pi i e^{\xi a} & \xi<0 \end{cases}$$

を得る．複素共役を取り，ξ を $-\xi$ で置き換えれば，

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x+ia} dx = \begin{cases} -2\pi i e^{-\xi a} & \xi>0 \\ 0 & \xi<0 \end{cases}$$

が得られる．

(2)

積分が存在することは明らかだから，

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x^2+a^2}dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x^2+a^2}dx$$

として求めてよい．

$$\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x-ia} - \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x+ia} = \frac{2ia}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{-ix\xi}$$

だから，前問の結果を用いて，

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{2ia\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x^2+a^2}dx &= \begin{cases} 2\pi i e^{-\xi a} & \xi > 0 \\ 2\pi i e^{\xi a} & \xi < 0 \end{cases} \\ &= 2\pi i \mathrm{e}^{-|\xi|a}\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-|\xi|a}$$

となる．また，

$$\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x-ia} + \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x+ia} = \frac{2x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{-ix\xi}$$

だから，前問の結果を用いて，

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{x\mathrm{e}^{-i\xi x}}{x^2+a^2}dx = \begin{cases} -\pi i e^{-\xi a} & \xi > 0 \\ \pi i e^{\xi a} & \xi < 0 \end{cases}$$

を得る．

問 3

(1)

m を自然数とする．$x^k e^{-\frac{x^2}{2}}(k=1,2,\dots,m)$ は全て $L^1(\mathbb{R})$ に属するので，定理 3.1.2 を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[x^m\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) &= i\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}\left[x^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) \\ &= \left(i\frac{d}{d\xi}\right)^2\mathcal{F}\left[x^{n-2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) \\ &= \dots \\ &= \left(i\frac{d}{d\xi}\right)^m\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi)\end{aligned}$$

を得る．したがって，Fourier 変換の線形性から，

$$\mathcal{F}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) = f\left(i\frac{d}{d\xi}\right)\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi)$$

となる．よって

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi)=f\left(i\frac{d}{d\xi}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

f は n 次多項式だから，右辺は n 次多項式 g を用いて $g(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$ と書ける．以上により，示された．

(2)

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく．前問の結果から

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi)=f\left(i\frac{d}{d\xi}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

である．

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}&=-\xi\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\\ \frac{d^2}{d\xi^2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}&=(\xi^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\end{aligned}$$

だから，

$$f\left(i\frac{d}{d\xi}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}=\{a(1-\xi^2)+b(-i\xi)+c\}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

となる．したがって，これを $\lambda f(\xi)$ と係数比較して

$$\begin{aligned}(\lambda+1)a&=0\\ (\lambda+i)b&=0\\ -a+(\lambda-1)c&=0\end{aligned}$$

を得る．行列の形に書き直すと

$$\begin{pmatrix}\lambda+1&0&0\\0&\lambda+i&0\\-1&0&\lambda-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

となる．λ が $-1,-i,1$ のいずれでもないときは係数行列は正則だから，$a=b=c=0$ となる．そうでない時を考える．$\lambda=1$ のとき，$a=b=0,c$ は任意である．$\lambda=-i$ のとき，$a=c=0,b$ は任意である．$\lambda=-1$ の時，$b=0,a=-2c$ である．以上により，p を任意の定数として，

$$f(x)=\begin{cases}p(-2x^2+1)&\lambda=-1\\px&\lambda=-i\\p&\lambda\neq-1,-i\end{cases}$$

となる．

問 4

省略する．例えば杉浦光夫解析入門 2 の p251 や p322 を参照のこと．