院試 (幾何)

@28Vittorio

- 京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻 数学系・数理解析系 入学試験問題の専門科目（幾何）の解答例をつらつらと書きました.
- 学部 3 年までの幾何（多様体論・(コ) ホモロジー論の初歩）を前提にして書いています.
- かなり雑に書いているので, 解答の正確さは保証できません. ご容赦ください.
- 誤植・間違い・疑問等あれば連絡してもらえると嬉しいです.

記号

以下の記号は特に断りなく使うので, 表にまとめておきます.

記号	意味
inclusion	包含写像
projection	射影
point	一点
i	虚数単位
I	閉単位区間
δ_{ij}	Kronecker のデルタ
Jf_p	f の p における Jacobi 行列
$H_*(X)$	X の特異ホモロジー群
$H^*(X)$	X の de Rham コホモロジー群
$X \simeq Y$	X と Y はホモトピー同値である
$X \cong Y$	X と Y は同相である

これら以外の記号も特に説明することなく使ってしまうかもしれませんが, 適宜文脈に応じて汲み取ってください.

令和 2 年度 $\boxed{4}$

$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし, 写像 $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f((x, y), (z, w)) = (x + z, x + w, y + z, y + w)$$

で定める.

(1) f がはめ込みであるかどうかを判定せよ.

(2) $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ 上の微分形式 α を

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

で定める. このとき, $(f^*\alpha)_p = 0$ を満たす $S^1 \times S^1$ の点 p 全体の集合を求めよ.

解答

(1) $S^1 \times S^1$ の点 $p = (x, y, z, w)$ に対して, $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = \cos\phi,\ w = \sin\phi$ とおくと, $\{(\theta, \phi)\}$ が $S^1 \times S^1$ の p まわりの chart を定める. そこで, この chart を用いると f の微分 df_p の階数は

$$\operatorname{rank} df_p = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta}(x+z) & \frac{\partial}{\partial\phi}(x+z) \\ \frac{\partial}{\partial\theta}(x+w) & \frac{\partial}{\partial\phi}(x+w) \\ \frac{\partial}{\partial\theta}(y+z) & \frac{\partial}{\partial\phi}(y+z) \\ \frac{\partial}{\partial\theta}(y+w) & \frac{\partial}{\partial\phi}(y+w) \end{pmatrix}_{(\theta,\phi)} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\phi \\ \cos\theta & \cos\phi \end{pmatrix}_{(\theta,\phi)}$$

と計算される. 例えば $(\theta, \phi) = (\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$ とすると, Jacobi 行列のすべての成分が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるので, 階数は 1 となる. つまり, 微分が単射にならない点 $p \in S^1 \times S^1$ が存在するので f ははめ込みではない.

(2) 定義通りに $f^*\alpha$ を計算してみると

$$\begin{aligned} f^*\alpha &= d(x+z) \wedge d(x+w) + d(y+z) \wedge d(y+w) \\ &= d(\cos\theta + \cos\phi) \wedge d(\cos\theta + \sin\phi) + d(\sin\theta + \cos\phi) \wedge d(\sin\theta + \sin\phi) \\ &= (-\sin\theta\, d\theta - \sin\phi\, d\phi) \wedge (-\sin\theta\, d\theta + \cos\phi\, d\phi) + (\cos\theta\, d\theta - \sin\phi\, d\phi) \wedge (\cos\theta\, d\theta + \cos\phi\, d\phi) \\ &= (-\sin\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)\, d\theta \wedge d\phi \\ &= (\cos\theta - \sin\theta)(\cos\phi + \sin\phi)\, d\theta \wedge d\phi \end{aligned}$$

となるから, 各 $p = (x, y, z, w) = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\phi, \sin\phi)$ に対して,

$$(f^*\alpha)_p = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta - \sin\theta = 0 \ \text{ または } \ \cos\phi + \sin\phi = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = y \ \text{ または } \ z + w = 0$$

となる. よって, 求める集合は次のようになる.

$$\{(x, y, z, w) \in S^1 \times S^1 \mid x = y \ \text{ または } \ z + w = 0\}$$

令和 2 年度 $\boxed{\mathbf{5}}$

$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 1\}$ とする.

(1) $X = \{(p, q) \in S^3 \times S^3 \mid q \neq -p\}$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) $A = \{(p, q) \in S^3 \times S^3 \mid q \neq \pm p\}$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

解答

(1) $\Delta = \{(p, q) \in X \mid p = q\}$ とおき, 写像 $r : X \to \Delta$ を

$$r(p, q) = (p, p)$$

で定めると, r はホモトピー同値写像になる. 実際, $i : \Delta \hookrightarrow X$ を自然な包含写像とすれば, $r \circ i = \mathrm{id}_\Delta$ であり,

$$H(p, q, t) = \left(p, \frac{tp + (1 - t)q}{\|tp + (1 - t)q\|}\right)$$

により写像 $H : X \times I \to X$ を定める[1]と,

$$H(p, q, 0) = (p, q), \ \ H(p, q, 1) = (p, p)$$

となるから, H が id_X と $i \circ r$ との間のホモトピーを与えている. よって, $X \simeq \Delta$ となる. また $\Delta \cong S^3$ であるから, 結局 $X \simeq S^3$ がしたがうので, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 3) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) $U = \{(p, q) \in S^3 \times S^3 \mid q \neq -p\}$, $V = \{(p, q) \in S^3 \times S^3 \mid q \neq p\}$ とおくと, $\{U, V\}$ は $S^3 \times S^3$ の開被覆であり, (1) の結果より

$$U, V \simeq S^3, \ \ U \cap V = A$$

となっている. そこで $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと

	$H_*(U \cap V)$	$H_*(U) \oplus H_*(V)$		$H_*(U \cup V)$
6	$H_6(U \cap V)$	0		$\mathbb{Z}$
5	$H_5(U \cap V)$	0		0
4	$H_4(U \cap V)$	0		0
3	$H_3(U \cap V)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\xrightarrow{f}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
2	$H_2(U \cap V)$	0		0
1	$H_1(U \cap V)$	0		0
0	$H_0(U \cap V)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\xrightarrow{g}$	$\mathbb{Z}$

[1] H は well-defined な連続写像であることに注意する.

となる. まず, f を行列表示していこう. (1) での議論から分かるように, $H_3(U), H_3(V)$ の生成元はそれぞれ

$$\{(p,q) \in S^3 \times S^3 \mid p = q\}, \ \ \{(p,q) \in S^3 \times S^3 \mid p = -q\}$$

が定めるサイクルが代表している. これらのサイクルはどちらも $S^3 \times S^3$ の中で $S^3 \vee S^3$ が代表するサイクルになる[2]から f を行列表示すると

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる ($\sim$ は基本変形). また, 連結成分を観察することにより, g は

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示される. よって, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 2, 3, 5) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

[2] S^3 を一辺に模した正方形の図を書くと分かる. ちゃんと示したければ, 面倒だが $S^3 \times S^3$ を Δ を 3 セルに持つようにセル分割すればよい.

平成 31 年度 $\boxed{\mathbf{4}}$

$n \geq 2$ に対して,

$$S^{n-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\right\}$$

とし, 写像 $\Phi : S^{n-1} \times S^1 \to \mathbb{C}^n$ を

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, z) = (x_1 z, \ldots, x_n z)$$

と定める.

(1) Φ の像 M が $\mathbb{C}^n$ の実 n 次元部分多様体であることを示せ.

(2) n が偶数のとき, M が向き付け可能であることを示せ.

解答

(1) M が $\mathbb{C}^n$ の n 次元部分多様体であることを示すには, 像がちょうど M に一致している埋め込み $N \to \mathbb{C}^n$ を構成すればよい（N は何かしらの実 n 次元多様体）. そこで

$$N = S^{n-1} \times S^1 / (x, z) \sim (-x, -z)$$

とおくと, N は実 n 次元（可微分）多様体であり, Φ は

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \times S^1 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "\text{projection}"'] & & M \\ N \arrow[urr, "\bar{\Phi}"'] & & \end{tikzcd}$$

という連続な全単射 $\bar{\Phi} : N \to M$ を誘導することが分かる. N のコンパクト性と M の Hausdorff 性より, この $\bar{\Phi}$ は同相写像であることがしたがう. よってあとは $\bar{\Phi}$ がはめ込みであることを示せばよいが, projection : $S^{n-1} \times S^1 \to N$ は局所微分同相なので, 結局のところ Φ がはめ込みであることを示せばよい. 可微分写像 $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$g(x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2) = ({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 - 1, {y_1}^2 + {y_2}^2 - 1)$$

で定めると, $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ は g の正則値であり, $S^{n-1} \times S^1 = g^{-1}(0)$ と書けている. よって, Φ の自然な拡張[3] を $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^n$ とすると, 付録 A.2 よりすべての $p \in S^{n-1} \times S^1$ について,

$$\operatorname{rank} d\Phi_p = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} J\tilde{\Phi}_p \\ Jg_p \end{pmatrix} - 2$$

[3] $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ とみなしている.

が成立する. よって各 $p = (x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2) \in S^{n-1} \times S^1$ について

$$
\begin{aligned}
d\Phi_p \text{ が単射} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank} d\Phi_p = n \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} J\tilde{\Phi}_p \\ Jg_p \end{pmatrix} = n+2 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix}
y_1 & 0 & \ldots & 0 & x_1 & 0 \\
y_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & x_1 \\
0 & y_1 & \ldots & 0 & x_2 & 0 \\
0 & y_2 & \ldots & 0 & 0 & x_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & y_1 & x_n & 0 \\
0 & 0 & \ldots & y_2 & 0 & x_n \\
2x_1 & 2x_2 & \ldots & 2x_n & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 2y_1 & 2y_2
\end{pmatrix} = n+2
\end{aligned}
$$

と書き換えることができる. いま ${x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1, {y_1}^2 + {y_2}^2 = 1$ であるから, 必要ならば添え字を入れ替えることによって $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ であるとしてよい. このとき $\begin{pmatrix} J\tilde{\Phi}_p \\ Jg_p \end{pmatrix}$ のサイズ $n+2$ の小行列式として

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}
y_1 & 0 & \ldots & 0 & x_1 & 0 \\
y_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & x_1 \\
0 & y_1 & \ldots & 0 & x_2 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & y_1 & x_n & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 2y_1 & 2y_2
\end{pmatrix}
&= y_1 \det\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & 0 & x_1 \\
y_1 & \ldots & 0 & x_2 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & y_1 & x_n & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 2y_1 & 2y_2
\end{pmatrix} + (-1)^{n+2} x_1 \det\begin{pmatrix}
y_2 & 0 & \ldots & 0 & x_1 \\
0 & y_1 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & y_1 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 2y_2
\end{pmatrix} \\
&= (-1)^{n+2} x_1 y_1 \det\begin{pmatrix}
y_1 & \ldots & 0 & x_2 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & y_1 & x_n \\
0 & \ldots & 0 & 2y_1
\end{pmatrix} + (-1)^{n+2} x_1 {y_1}^{n-1}(2{y_2}^2) \\
&= (-1)^n x_1 (2{y_1}^{n+1}) + (-1)^n x_1 {y_1}^{n-1}(2{y_2}^2) \\
&= (-1)^n 2x_1 {y_1}^{n-1}({y_1}^2 + {y_2}^2) = (-1)^n 2x_1 {y_1}^{n-1} \neq 0
\end{aligned}
$$

となるものをとることができるので, すべての $p = (x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2) \in S^{n-1} \times S^1$ について $d\Phi_p$ が単射であることが言えた. よって Φ がはめ込みであることが言えた.

(2) N は連結な n 次元閉多様体であるから,

$$N \text{ は向き付け可能} \Leftrightarrow H_n(N) \cong \mathbb{Z}$$

である. よって n が偶数のときに $H_n(N) \cong \mathbb{Z}$ となることを示せばよい. ところで N は

$$N = S^{n-1} \times [0,1]/(x,0) \sim (-x,1)$$

とみることができるので

$$\begin{cases} U = S^{n-1} \times (1/5, 4/5)/(x,0) \sim (-x,1) \subset N \\ V = S^{n-1} \times ([0,2/5) \cup (3/5,1])/(x,0) \sim (-x,1) \subset N \end{cases}$$

とおけば, これらは N の開被覆であり

$$U \simeq S^{n-1},\ V \simeq S^{n-1},\ U \cap V \simeq S^{n-1} \sqcup S^{n-1}$$

となっている. よって Mayer-Vietoris 完全系列を書くと次のようになる:

$$\begin{array}{cccc} & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\ n & 0 & 0 & H_n(N) \\ n-1 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_{n-1}(U \cup V) \\ n-2 & 0 & 0 & H_{n-2}(U \cup V) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & H_1(U \cup V) \\ 0 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_0(U \cup V) \end{array}$$

N は $S^{n-1} \times I$ と $S^{n-1} \times I$ を恒等写像と対心写像で貼り合わせたものであることから, f を行列表示すると

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \deg f \end{pmatrix}$$

となる. 一般に S^{n-1} の対心写像の写像度は $(-1)^n$ であるから, n が偶数ならば

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる ($\sim$ は基本変形). ゆえに $H_n(N) \cong \operatorname{Ker} f \cong \mathbb{Z}$ がしたがう.

平成 31 年度 $\boxed{\mathbf{5}}$

$\mathbb{C}$ の部分空間

$$X = \left\{1 - e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \le \theta < 2\pi\right\} \cup \left\{-1 + e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \le \theta < 2\pi\right\}$$

を考える. 整数 p, q に対して, 写像 $f : X \to X$ を

$$\begin{aligned} f(1 - e^{i\theta}) &= -1 + e^{ip\theta} \\ f(-1 + e^{i\theta}) &= 1 - e^{iq\theta} \end{aligned}$$

で定め, $X \times [0,1]$ に

$$(x, 0) \sim (f(x), 1)$$

$(x \in X)$ で生成される同値関係 $\sim$ を与える. 商空間 $Y = (X \times [0,1]) / \sim$ の整数係数ホモロジー群を計算せよ.

解答

Y の開被覆 $\{U, V\}$ として次のようなものをとろう:

$$\begin{cases} U = X \times (1/5, 4/5)/(x,0) \sim (f(x), 1) \\ V = X \times ([0, 2/5) \cup (3/5, 1])/(x, 0) \sim (f(x), 1) \end{cases}$$

このとき

$$U \simeq S^1 \vee S^1,\ V \simeq S^1 \vee S^1,\ U \cap V \simeq S^1 \vee S^1 \sqcup S^1 \vee S^1$$

となるので, $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと次のようになる:

$$\begin{array}{cccc} & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(Y) \\ 2 & 0 & 0 & H_2(Y) \\ 1 & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 & H_1(Y) \\ 0 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\ g\ } & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_0(Y) \end{array}$$

まず, f を調べよう. Y は $(S^1 \vee S^1) \times I$ と $(S^1 \vee S^1) \times I$ を 恒等写像と 2 つの S^1 を入れ替えながらそれぞれ p 倍, q 倍する写像で貼り合わせて得られるので, f を行列表示すると

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & p & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & p & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pq - 1 \end{pmatrix}$$

となる ($\sim$ は基本変形). 次に g を調べよう. 0 次のところは連結成分を観察すればよいので, g を行列表示すると

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる ($\sim$ は基本変形). ここで

$$0 \to \mathrm{Coker}\, f \to H_1(Y) \to \mathrm{Ker}\, g \to 0$$

という短完全列を考えると, $\mathrm{Ker}\, g$ が自由アーベル群だから [4] この短完全列は分裂する. よって

$$\begin{aligned} H_0(Y) &= \mathrm{Coker}\, g \\ H_1(Y) &= \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Coker}\, f \\ H_2(Y) &= \mathrm{Ker}\, f \end{aligned}$$

となる. よって, 求める答えは次のようになる:

(1) $pq \neq 1$ のとき

$$H_*(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(pq-1)\mathbb{Z} & (* = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) $pq = 1$ のとき

$$H_*(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 2) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (* = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

[4] 一般に, 単項イデアル整域上の自由加群の部分加群は常に自由である.

平成 30 年度 $\boxed{\mathbf{4}}$

正の整数 n に対して, n 次元球面 S^n を

$$S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 = 1\right\}$$

によって定義する.

(1) $S^3 \times S^2$ の実係数 de Rham コホモロジー群を求めよ.（答えのみで良い.）

(2) $f : S^5 \to S^3 \times S^2$ 全射な C^∞ 級写像とし, $CV(f)$ をその臨界値全体のなす集合とする. このとき, 任意の $p \in S^2$ に対して, $CV(f) \cap (S^3 \times \{p\}) \neq \emptyset$ であることを示せ.

解答

(1)

$$H^*(S^3 \times S^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & (* = 0, 2, 3, 5) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) 背理法を用いて示そう. ある $p \in S^2$ に対して, $CV(f) \cap (S^3 \times \{p\}) = \emptyset$ であると仮定する. このとき, 合成

$$S^5 \xrightarrow{\quad f \quad} S^3 \times S^2 \xrightarrow{\quad \pi_2 \quad} S^2$$

は $p \in S^2$ を正則値に持つので, $M = (\pi_2 \circ f)^{-1}(p) = f^{-1}(S^3 \times \{p\})$ とおくと, M は S^5 の (コンパクトな) 3 次元部分多様体である. さて各 $q \in M$ における合成

$$M \xrightarrow{\text{inclusion}} S^5 \xrightarrow{\quad f \quad} S^3 \times S^2$$

の微分を調べると単射であるから, $S^3 \times \{p\}$ の体積形式 ω を $f|_M$ で引き戻してみると, 各 $q \in M$ に対して,

$$\left(f|_M{}^*\omega\right)_q = \omega_{f(q)} \circ d\left(f|_M\right)_q \neq 0$$

が成立する. よって $f|_M{}^*\omega$ は至る所ゼロでないので $H^3(M) \cong \mathbb{R}$ であり $f|_M{}^*\omega$ は $H^3(M)$ の生成元を定める. つまり $\left(f|_M\right)^* : H^3(S^3 \times \{p\}) \to H^3(M)$ は零写像ではない. そこで

$$\begin{array}{ccc} S^5 & \xrightarrow{\quad f \quad} & S^3 \times S^2 \\ {\scriptstyle \text{inclusion}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \text{inclusion}} \\ M & \xrightarrow{\quad f|_M \quad} & S^3 \times \{p\} \end{array}$$

という図式を 3 次 de Rham コホモロジー群に誘導してみると,

$$\begin{array}{ccc} H^3(S^5) & \xleftarrow{\quad f^* \quad} & H^3(S^3 \times S^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^3(M) & \xleftarrow{\quad (f|_M)^* \quad} & H^3(S^3 \times \{p\}) \end{array}$$

となるが, 上を通る経路は $H^3(S^5) = 0$ だから零写像であり, 一方で下を通る経路は上で示した通り零写像ではない. これは矛盾である.

平成 30 年度 $\boxed{5}$

4 次元球面

$$S^4 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2 = 1\right\}$$

の部分空間 L_1 と L_2 を

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\right\} \\ L_2 &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S^4 \mid x_3 = x_4 = x_5 = 0\right\} \end{aligned}$$

で定める. このとき, $S^4 \setminus (L_1 \cup L_2)$ の有理係数ホモロジー群を求めよ.

解答

$U = S^4 \setminus L_1, V = S^4 \setminus L_2$ とおくと $\{U, V\}$ は S^4 の開被覆であり, $U \cap V = S^4 \setminus (L_1 \cup L_2)$ かつ

$$U,\ V \ \cong\ \mathbb{R}^4 \setminus \{\text{line}\} \ \simeq\ \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{point}\} \ \simeq\ S^2$$

であるから, $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと

	$H_*(U \cap V)$	$H_*(U) \oplus H_*(V)$	$H_*(U \cup V)$
4	$H_4(U \cap V)$	0	$\mathbb{Q}$
3	$H_3(U \cap V)$	0	0
2	$H_2(U \cap V)$	$\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$	0
1	$H_1(U \cap V)$	0	0
0	$H_0(U \cap V)$	$\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$

となる. よって, 求める答えは次のようになる:

$$H_*\left(S^4 \setminus (L_1 \cup L_2)\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (* = 0, 3) \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & (* = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

平成 29 年度 $\boxed{4}$

$p_1 = (1,0), p_2 = (2,0)$ を $\mathbb{R}^2$ の 2 点とする. 以下の問に答えよ.

(i) $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ の実数係数 1 次元コホモロジー群を求めよ.

(ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の 1 次微分形式を

$$\theta = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2}$$

で定める. ただし, (x_1, x_2) は $\mathbb{R}^2$ の座標である. 写像 $T_i : \mathbb{R}^2 \setminus \{p_i\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を $T_i(x) = x - p_i$ で定める $(i = 1,2)$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ 上の 1 次微分形式 α で, 次の条件 (1), (2) を同時に満たすものが存在することを示せ.

(1) $d\alpha = 0$

(2) 各 $i = 1,2$ について, p_i の開近傍 U_i が存在して,

$$\alpha|_{U_i \setminus p_i} = (T_i^* \theta)\big|_{U_i \setminus p_i}.$$

解答

(i) $U = (\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1\}) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 5/3\}$, $V = (\mathbb{R}^2 \setminus \{p_2\}) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 4/3\}$ とおくと, $\{U, V\}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ の開被覆であり

$$U, V \simeq S^1, \ U \cap V \simeq \{\text{point}\}$$

であるから, Mayer-Vietoris 完全系列を書くと

$$\begin{array}{cccc}
 & H^*(U \cap V) & H^*(U) \oplus H_*(V) & H^*(U \cup V) \\
2 & 0 & 0 & H^2(U \cup V) \\
1 & 0 & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xleftarrow[f]{} & H^1(U \cup V) \\
0 & \mathbb{R} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & H^0(U \cup V)
\end{array}$$

となる. $U \cup V$ は連結なので $H^0(U \cup V) \cong \mathbb{R}$ であるから, f が同型であることが分かる. よって, 求める答えは次のようになる:

$$H^*\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (* = 0) \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & (* = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(ii) θ は閉形式であるから $(T_1^* \theta)\big|_U$ および $(T_2^* \theta)\big|_V$ はそれぞれ U, V 上の 1 次閉形式である. (i) に登場した写像 f は同型であるから, $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ 上のある閉形式 $\tilde{\alpha}$ が存在して

$$[\tilde{\alpha}|_U] = [(T_1^* \theta)\big|_U] \in H^1(U), \ [\tilde{\alpha}|_V] = [(T_2^* \theta)\big|_V] \in H^1(V)$$

となる. よって $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ 上の閉形式 $\tilde{\alpha}$ であって, p_1 および p_2 の近傍で" 微分形式として一致しているとまでは言えないがコホモロジーとしては一致する" ものがとれた. この $\tilde{\alpha}$ を次のように修正しよう:

$\tilde{\alpha}|_U - (T_1^*\theta)\big|_U$ および $\tilde{\alpha}|_V - (T_2^*\theta)\big|_V$ は完全形式であるから, ある 0 次微分形式 f_1, f_2 が存在して

$$df_1 = \tilde{\alpha}|_U - (T_1^*\theta)\big|_U\,,\ df_2 = \tilde{\alpha}|_V - (T_2^*\theta)\big|_V$$

とできる. そこで $\{U, V\}$ に関する 1 の分割 ρ_U, ρ_V をとり,

$$\alpha = \tilde{\alpha} - d(\rho_U f_1) - d(\rho_V f_2)$$

と定めてみると, 閉形式に完全形式をつけただけなので α は閉形式であり (1) の条件を満たしている, さらに $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 4/3\},\ U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 5/3\}$ とおくと,

$$\rho_U \equiv \begin{cases} 1 & (\text{ on } U_1\ ) \\ 0 & (\text{ on } U_2\ ) \end{cases}, \quad \rho_V \equiv \begin{cases} 0 & (\text{ on } U_1\ ) \\ 1 & (\text{ on } U_2\ ) \end{cases}$$

であるから, α を $U_1 \setminus p_1$ および $U_2 \setminus p_2$ 上に制限すると,

$$\begin{aligned} \alpha|_{U_1\setminus p_1} &= \tilde{\alpha}|_{U_1\setminus p_1} - (df_1)|_{U_1\setminus p_1} = (T_1^*\theta)\big|_{U_1\setminus p_1} \\ \alpha|_{U_2\setminus p_2} &= \tilde{\alpha}|_{U_2\setminus p_2} - (df_2)|_{U_2\setminus p_2} = (T_2^*\theta)\big|_{U_2\setminus p_2} \end{aligned}$$

となる. よって α は条件 (2) も満たしている. 以上により, 求める α を構成することができた.

平成 29 年度 $\boxed{5}$

$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする. D^2 の境界を $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ で定義する. $S^1 = \{(z, w) \in \mathbb{R} \mid z^2 + w^2 = 1\}$ とする. 以下の問に答えよ.

(i) $M = D^2 \times S^1$ とする. M の境界を $\partial M = \partial D^2 \times S^1$ で定義する. M の同値関係 $\sim$ を次の $(*)$ で定める.

$(*)$ $p, q \in M$ について, $p \sim q$ となるのは, $p = q$ または $p, q \in \partial M$ であるとき

この同値関係による M の商空間 $M/\partial M$ の整数係数ホモロジー群を求めよ.

(ii) $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ の部分空間 Y を

$$Y = \{(p, p, p) \in S^1 \mid p \in S^1\}$$

で定義する. このとき, T^3 における Y の補空間 $T^3 \setminus Y$ の整数係数ホモロジー群を求めよ.

解答

(i) 対 $(M, \partial M)$ に関するホモロジー長完全系列を書くと, $M \simeq S^1$ かつ $\partial M = S^1 \times S^1$ なので

$$\begin{array}{cccc}
 & H_*(\partial M) & H_*(M) & H_*(M, \partial M) \\
2 & \mathbb{Z} & 0 & H_2(M, \partial M) \\
1 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{Z} & H_1(M, \partial M) \\
0 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & H_0(M, \partial M)
\end{array}$$

∂M のメリディアンが表わすサイクルを f で送ると 0 になってしまうが, ロンジチュードが表わすサイクルを f で送ってもそのまま生き残るので, f を行列表示すると

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表わされる. よって, 対のホモロジー群 $H_*(M, \partial M)$ は次のようになる:

$$H_*(M, \partial M) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 2, 3) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となる. 一般に CW 対 (X, A) に対して

$$H_*(X, A) \cong H_*(X/A, \text{point}) \cong \tilde{H}_*(X/A)$$

が成立するから, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(M/\partial M) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 2, 3) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(ii) $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ の 3 番目の S^1 を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とみなしたうえで,

$$U = Y \cap (S^1 \times S^1 \times (1/5, 4/5)),\ V = Y \cap (S^1 \times S^1 \times (3/5, 7/5))$$

とおくと, $\{U, V\}$ は Y の開被覆で

$$U, V \simeq S^1 \times S^1 \setminus \{\text{point}\} \simeq S^1 \vee S^1,\ U \cap V \simeq S^1 \vee S^1 \sqcup S^1 \vee S^1$$

となる. よって, $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと,

$$\begin{array}{cccc}
 & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\
3 & 0 & 0 & H_3(U \cup V) \\
2 & 0 & 0 & H_2(U \cup V) \\
1 & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 & H_1(U \cup V) \\
0 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_0(U \cup V)
\end{array}$$

Y は U と V を何もねじることなくそのまま貼り合わせているので, f を行列表示すると

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる ($\sim$ は基本変形). ここで

$$0 \to \operatorname{Coker} f \to H_1(U \cup V) \to \operatorname{Ker} g \to 0$$

という短完全列を考えると, $\operatorname{Ker} g$ が自由アーベル群だからこの短完全列は分裂する. よって

$$\begin{aligned}
H_0(U \cup V) &= \operatorname{Coker} g \\
H_1(U \cup V) &= \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Coker} f \\
H_2(U \cup V) &= \operatorname{Ker} f
\end{aligned}$$

となる. 以上より, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0) \\ \mathbb{Z}^3 & (* = 1) \\ \mathbb{Z}^2 & (* = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

平成 28 年度 $\boxed{4}$

$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とおく. $j : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を自然な埋め込み写像とする.
$\omega = j^* (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$ とおく. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) 各点 $p \in S^2$ において, ω_p は 0 でないことを示せ.

(ii) 各点 $p \in S^2$ において, 接空間 T_pS^2 と余接空間 $T_p^*S^2$ の間の線形写像 $\Phi_p : T_pS^2 \to T_p^*S^2$ を

$$\Phi_p(v) = \iota_v \omega_p$$

で定める. (ただし, ι_v は v による内部積を表す.) Φ_p が同型であることを示せ.

(iii) S^2 上の C^∞ 級関数 f, g に対し, S^2 上の関数 $\{f, g\}$ を

$$\{f, g\}(p) = \omega_p(\Phi_p^{-1}(df_p), \Phi_p^{-1}(dg_p))$$

とおく. x と y を制限によって S^2 上の C^∞ 級関数とみたとき, $\{x, y\}$ を求めよ.

解答

(i) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ で定めると, 0 は F の正則値であり $S^2 = F^{-1}(0)$ であるから, 付録 A.1 より各 $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ に対して

$$T_pS^2 = \mathrm{Ker}\, dF_p = \mathrm{Ker}\,(2x_0\ 2y_0\ 2z_0)$$

が成立している. よって

$$v_1 = y_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - x_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p,\ v_2 = z_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p - y_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p,\ v_3 = x_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p - z_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p,$$

とおくと, $v_1, v_2, v_3 \in T_pS^2$ となっている. ここで ${x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 = 1$ に注意して $\omega_p(v_1, v_2)$ を計算してみると

$$\begin{aligned}
\omega_p(v_1, v_2) &= (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)_p(j_*v_1, j_*v_2) \\
&= (xdy \wedge dz)_p\left(y_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - x_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p, z_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p - y_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right) \\
&+ (ydz \wedge dx)_p\left(y_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - x_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p, z_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p - y_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right) \\
&+ (zdx \wedge dy)_p\left(y_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - x_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p, z_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p - y_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right) \\
&= {x_0}^2 y_0 + {y_0}^3 + y_0 {z_0}^2 \\
&= y_0({x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2) = y_0
\end{aligned}$$

となることが分かり, 全く同様にして $\omega_p(v_2, v_3) = z_0,\ \omega_p(v_3, v_1) = x_0$ が分かる. $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ であるから x_0, y_0, z_0 は同時に 0 になることはない. よって $\omega_p \neq 0$ であることが示された.

(ii)　Φ_p が単射であることを示せば十分である．任意に $v = a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + a_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \in T_pS^2$ をとり，$\Phi_p(v) = \iota_v\omega_p = 0$ と仮定しよう．このとき a_1, a_2, a_3 は $a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 = 0$ を満たしているので

$$
\begin{aligned}
0 &= \iota_v\omega_p(v_1) = \omega_p(v, v_1) \\
&= (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)_p(j_*v, j_*v_1) \\
&= (xdy \wedge dz)_p\left(a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + a_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p, y_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - x_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) \\
&+ (ydz \wedge dx)_p\left(a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + a_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p, y_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - x_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) \\
&+ (zdx \wedge dy)_p\left(a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + a_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p, y_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - x_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) \\
&= a_3{x_0}^2 + a_3{y_0}^2 + z_0(-a_1x_0 - a_2y_0) \\
&= a_3({x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2) = a_3
\end{aligned}
$$

と計算される．全く同様にして

$$0 = \iota_v\omega_p(v_2) = a_1,\ 0 = \iota_v\omega_p(v_3) = a_2$$

を得るから $v = 0$ となる．よって，Φ_p の単射性が示された．

(iii)　まず $\Phi_p^{-1}(dx_p) = v = a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + a_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\Phi_p^{-1}(dy_p) = w = b_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + b_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + b_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ とおいて v, w がどのような接ベクトルなのかを調べる．まず，v_1, v_2, v_3 の定義より

$$
\begin{aligned}
&dx_p(v_1) = y_0, \quad dx_p(v_2) = 0, \quad dx_p(v_3) = -z_0 \\
&dy_p(v_1) = -x_0, \quad dy_p(v_2) = z_0, \quad dy_p(v_3) = 0
\end{aligned}
$$

と計算される．一方で $dx_p = \Phi_p(v) = \iota_v(\omega)$, $dy_p = \Phi_p(w) = \iota_w(\omega)$ なので (ii) での計算結果より

$$
\begin{aligned}
&dx_p(v_1) = \iota_v(\omega)(v_1) = a_3, \quad dx_p(v_2) = \iota_v(\omega)(v_2) = a_1, \quad dx_p(v_3) = \iota_v(\omega)(v_3) = a_2 \\
&dy_p(v_1) = \iota_w(\omega)(v_1) = b_3, \quad dy_p(v_2) = \iota_w(\omega)(v_2) = b_1, \quad dy_p(v_3) = \iota_w(\omega)(v_3) = b_2
\end{aligned}
$$

となる．2 つの計算結果を比較すると

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 0, \quad a_2 = -z_0, \quad a_3 = y_0 \\
&b_1 = z_0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -x_0
\end{aligned}
$$

を得る．よって

$$\Phi_p^{-1}(dx_p) = v = -z_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + y_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p = -v_2, \quad \Phi_p^{-1}(dy_p) = w = z_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - x_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p = -v_3$$

となる．以上により，(i) の計算結果と合わせると

$$\{x, y\}(p) = \omega_p(\Phi_p^{-1}(dx_p), \Phi_p^{-1}(dy_p)) = \omega_p(-v_2, -v_3) = \omega_p(v_2, v_3) = z_0$$

となる．ゆえに $\{x, y\} : S^2 \to \mathbb{R}$ は第 3 成分を取り出す写像である．

平成 28 年度 $\boxed{\mathbf{5}}$

S^2 を 2 次元球面とする. $I = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \le t \le 1\}$ とおく. $S^2 \times S^2 \times I$ の商空間 $X = (S^2 \times S^2 \times I)/\sim$ の整数係数ホモロジー群を求めよ. ただし, $\sim$ は

$$(p, q, 0) \sim (q, p, 1) \quad (p, q \in S^2)$$

が生成する同値関係とする.

解答

$$U = (S^2 \times S^2 \times (1/5, 4/5))/\sim, \quad V = (S^2 \times S^2 \times ([0, 2/5) \sqcup (3/5, 1]))/\sim$$

とおくと, $\{U, V\}$ は Y の開被覆で

$$U, V \simeq S^2 \times S^2, \quad U \cap V \simeq S^2 \times S^2 \sqcup S^2 \times S^2$$

となる. よって, $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと,

$$\begin{array}{cccc}
 & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\
5 & 0 & 0 & H_5(U \cup V) \\
4 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_4(U \cup V) \\
3 & 0 & 0 & H_3(U \cup V) \\
2 & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 & H_2(U \cup V) \\
1 & 0 & 0 & H_1(U \cup V) \\
0 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad h \quad} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_0(U \cup V)
\end{array}$$

となる. X は $S^2 \times S^2 \times I$ と $S^2 \times S^2 \times I$ を 恒等写像と 2 次元のサイクルを入れ替える写像で貼り合わせて得られるので, f, g, h をそれぞれ行列表示すると

$$f, h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる ($\sim$ は基本変形). 以上より, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

平成 27 年度 $\boxed{4}$

$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 1\}$ とおき, 自然に $\mathbb{R}^4$ の C^∞ 部分多様体とみなす. また, S^3 上の微分形式 ω の外微分を $d\omega$ で表す. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) S^3 上の次微分形式 φ が $d\varphi = 0$ を満たすならば, $\varphi_p = 0$ となる $p \in S^3$ が存在することを示せ.

(ii) $j : S^3 \to \mathbb{R}^4$ を包含写像とする. $\mathbb{R}^4$ 上の 2 次微分形式

$$\eta = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

の S^3 への制限 $\zeta = j^*\eta$ は次の条件を満たすことを示せ.

(a) $d\zeta = 0$.

(b) $\zeta_p = 0$ となる $p \in S^3$ は存在しない.

解答

(i) $H^1(S^3) = 0$ であるから $d\varphi = 0$ という条件は φ が完全形式であることを意味する. よって, ある 0 次微分形式 f が存在して $\varphi = df$ となる. S^3 はコンパクトであるから, f の最大値を実現する点 $p \in S^3$ が存在する. このとき, p は f の臨界点であるから, $\varphi_p = df_p = 0$ となる.

(ii) まず (a) を示す. $\eta = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ は閉形式であるから,

$$d\zeta = dj^*\eta = j^*d\eta = j^*0 = 0$$

となる. よって (a) が示された. 次に (b) を示す. $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 - 1$ で定めると, 0 は F の正則値であり $S^3 = F^{-1}(0)$ であるから, 付録 A.1 より各 $p = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in S^3$ に対して

$$T_pS^3 = \operatorname{Ker} dF_p = \operatorname{Ker}(2a_1\ 2a_2\ 2a_3\ 2a_4)$$

が成立している. よって

$$v_{ij} = a_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p - a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \qquad (1 \le i, j \le 4)$$

とおくと, $v_{ij} \in T_pS^3$ となっている. このとき

$$\zeta_p(v_{13}, v_{14}) = (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)_p\left(a_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p, a_4\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)_p\right) = {a_1}^2$$

$$\zeta_p(v_{23}, v_{24}) = (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)_p\left(a_3\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p - a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p, a_4\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p - a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)_p\right) = {a_2}^2$$

$$\zeta_p(v_{13}, v_{23}) = (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)_p\left(a_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p, a_3\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p - a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p\right) = {a_3}^2$$

$$\zeta_p(v_{14}, v_{24}) = (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)_p\left(a_4\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)_p, a_4\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p - a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)_p\right) = {a_4}^2$$

と計算される. $p = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in S^3$ より a_1, a_2, a_3, a_4 のいずれかはゼロではない. よって, 上の 4 つの値のいずれかはゼロではなく, $\zeta_p \neq 0$ であることが示された. ゆえに $\zeta_p = 0$ となる $p \in S^3$ は存在しない.

平成 27 年度 $\boxed{5}$

$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 = 1\}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(i) $S^1 \times S^1 \times S^1$ の商空間 $X = (S^1 \times S^1 \times S^1) / \sim$ の整数係数ホモロジー群を求めよ. ただし, $\sim$ は

$$(x, y, z) \sim (-x, -y, -z) \quad ((x, y, z) \in S^1)$$

が生成する同値関係とする.

(ii) $S^2 \times S^1$ の商空間 $Y = (S^2 \times S^1) / \sim$ の整数係数ホモロジー群を求めよ. ただし, $\sim$ は

$$(x, y) \sim (-x, -y) \quad (x \in S^2, y \in S^1)$$

が生成する同値関係とする.

解答

(i) X は $(S^1 \times S^1 \times I)/(x, y, 0) \sim (-x, -y, 1)$ だと思えるので,

$$\begin{cases} U = S^1 \times S^1 \times (1/5, 4/5) \ / \ (x, y, 0) \sim (-x, -y, 1) \\ V = S^1 \times S^1 \times ([0, 3/5) \sqcup (3/5, 1])0 \ / \ (x, y, 0) \sim (-x, -y, 1) \end{cases}$$

とおくと, $\{U, V\}$ は X の開被覆で

$$U, V \simeq S^1 \times S^1, \ U \cap V \simeq S^1 \times S^1 \sqcup S^1 \times S^1$$

となる. よって, $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと,

$$\begin{array}{cccc}
 & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\
3 & 0 & 0 & H_3(U \cup V) \\
2 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_2(U \cup V) \\
1 & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 & H_1(U \cup V) \\
0 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_0(U \cup V)
\end{array}$$

X は U と V を恒等写像と対心写像で貼り合わせているので, f, g, h を行列表示すると

$$f, h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる ($\sim$ は基本変形). ここで

$$0 \to \mathrm{Coker}\, f \to H_2(U \cup V) \to \mathrm{Ker}\, g \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Coker}\, g \to H_1(U \cup V) \to \mathrm{Ker}\, h \to 0$$

という短完全列を考えると, $\mathrm{Ker}\, g, \mathrm{Ker}\, h$ が自由アーベル群だからこれらの短完全列は分裂する. よって

$$\begin{aligned} H_0(U \cup V) &= \mathrm{Coker}\, h \\ H_1(U \cup V) &= \mathrm{Ker}\, h \oplus \mathrm{Coker}\, g \\ H_2(U \cup V) &= \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Coker}\, f \\ H_3(U \cup V) &= \mathrm{Coker}\, f \end{aligned}$$

となる. 以上より, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 2, 3) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (* = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(ii) Y は $(S^2 \times I)/(x, 0) \sim (-x, 1)$ だと思えるので,

$$\begin{cases} U = S^2 \times (1/5, 4/5) \ / \ (x, 0) \sim (-x, 1) \\ V = S^2 \times ([0, 3/5) \sqcup (3/5, 1])0 \ / \ (x, 0) \sim (-x, 1) \end{cases}$$

とおくと, $\{U, V\}$ は Y の開被覆で

$$U, V \simeq S^2, \ U \cap V \simeq S^2 \sqcup S^2$$

となる. よって Mayer-Vietoris 完全系列を書くと,

$$\begin{array}{cccc} & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\ 3 & 0 & 0 & H_3(U \cup V) \\ 2 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_2(U \cup V) \\ 1 & 0 & 0 & H_1(U \cup V) \\ 0 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_0(U \cup V) \end{array}$$

X は U と V を恒等写像と対心写像で貼り合わせているので, f, g を行列表示すると

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる ($\sim$ は基本変形). 以上より, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 1) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (* = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

平成 26 年度 $\boxed{4}$

M を境界のないコンパクトな C^∞ 級多様体とし, N を M の余次元 1 の C^∞ 級閉部分多様体とする. ここで, 部分多様体の包含写像は C^∞ 級埋め込みであるとする.

(i) N の任意の点 p に対し, M における p の近傍 U と, U 上の C^∞ 級 1 次微分形式 θ が存在し, 次をみたすこと示せ.

$$\text{任意の } q \in N \cap U \text{ に対し, } \theta_q \neq 0 \text{ であり, } \mathrm{Ker}\,\theta_q = T_qN \text{ となる.}$$

ただし, T_qN は q における N の接空間を意味する.

(ii) M, N がともに向き付け可能であるとき, M 上の C^∞ 級 1 次微分形式 θ が存在し, 次をみたすこと示せ.

$$\text{任意の } q \in N \text{ に対し, } \theta_q \neq 0 \text{ であり, } \mathrm{Ker}\,\theta_q = T_qN \text{ となる.}$$

解答

(i) 管状近傍定理より, N の M におけるある開近傍 $T(N)$ が存在して, $T(N)$ は N の M における法束 $\pi : E \to N$ の全空間 E とみなせる. いま N は M の余次元 1 の C^∞ 級閉部分多様体なので, 法束 $\pi : T(N) \to N$ は直線束である. よって, 任意の $p \in N$ に対して N における p のある開近傍 V が存在して

$$\pi^{-1}(V) \cong V \times (-1, 1), \quad (\text{ただし, } N \cap \pi^{-1}(V) \text{ は } V \times \{0\} \text{ に対応する.})$$

とできる. そこで $U = \pi^{-1}(V)$ とおき, U 上の C^∞ 級 1 次微分形式 θ を

$$\theta = f dt$$

で定めよう. ただし, t は $(-1, 1)$ の座標であり, $f : U \to \mathbb{R}$ は $\rho(0) = 1$ かつ $[-1, 1]$ をサポートに持つ C^∞ 級関数[5] $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を用いて

$$\begin{cases} f(x, t) = \rho(t) & (\ (x, t) \in U \cong V \times (-1, 1)\ ) \\ f(q) = 0 & (\ q \in M \setminus U\ ) \end{cases}$$

と書ける関数である[6]. このとき, 各点 $q = (q, 0) \in N \cap U$ における M の接ベクトル $v \in T_qM$ を $w + c\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 \in T_qN \oplus T_0(-1, 1)$ のように接戦方向と法線方向に分解しておくと

$$\theta_q(v) = f(q, 0)dt_0\left(w + c\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0\right) = \rho(0)c = c$$

と計算される. したがって

$$v \in \mathrm{Ker}\,\theta_q \iff \theta_q(v) = 0 \iff c = 0 \qquad \iff v \in T_qN$$

---

[5] 例えば, 次のような関数を考えればよい:

$$\rho(t) = \begin{cases} e \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & (-1 < t < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

[6] 難しく書いてしまったが, 単に N の法線方向の接ベクトルのみに値を持つ微分形式を作りたいだけである.

となるから, $\mathrm{Ker}\,\theta_q = T_qN$ となる. よって, ここから $\theta_q \neq 0$ もしたがう.
(ii) M, N が向き付け可能のときは N の M における法束 $\pi : T(N) \to N$ は自明であるから,

$$T(N) \cong N \times (-1, 1)$$

である. そこで $U = T(N)$ とおき M 上の 1 次微分形式 θ を

$$\theta = \begin{cases} gdt & (\text{ on } T(N)) \\ 0 & (\text{ on } M \setminus T(N)) \end{cases}$$

で定めよう. ただし, t は $(-1, 1)$ の座標であり, $g : M \to \mathbb{R}$ は $\rho(0) = 1$ かつ $[-1, 1]$ をサポートに持つ C^∞ 級関数 $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を用いて

$$\begin{cases} g(x, t) = \rho(t) & ((x, t) \in U \cong N \times (-1, 1)) \\ g(q) = 0 & (q \in M \setminus U) \end{cases}$$

と書ける関数である. (i) と同様に θ を構成したのだから, 各 $q = (q, 0) \in N$ に対して $\mathrm{Ker}\,\theta_q = T_qN$ となることが (i) と同様にして言える. もちろん $\theta_q \neq 0$ もしたがう.

平成 26 年度 $\boxed{5}$

円周 S^1 の点 p をひとつとる. $S^1\times S^1\times S^1\times S^1$ の部分空間

$$X=\{(x,y,z,w)\in S^1\times S^1\times S^1\times S^1 \mid x=p, \text{または } y=p, \text{または } \quad z=w=p\}$$

の整数係数ホモロジー群を求めよ.

解答

まず, 各 S^1 を p が 0 セルとなるようにセル分割しておく:

$$S^1=e_x^0\cup e_x^1,\ \ S^1=e_y^0\cup e_y^1,\ \ S^1=e_z^0\cup e_z^1,\ \ S^1=e_w^0\cup e_w^1$$

すると $S^1\times S^1\times S^1\times S^1$ には

$$S^1\times S^1\times S^1\times S^1=\bigcup_{i,j,k,l=0,1} e^{ijkl}\quad (\text{ただし}, e^{ijkl}=e_x^i\times e_y^j\times e_z^k\times e_w^l\text{とおいた.})$$

というセル分割が誘導される. さて X を定める 3 つの条件式を見ると

$$\begin{aligned}
\{x=p\} &= e^{0000}\cup\left(e^{0001}\cup e^{0010}\cup e^{0100}\right)\cup\left(e^{0011}\cup e^{0101}\cup e^{0110}\right)\cup e^{0111}\\
\{y=p\} &= e^{0000}\cup\left(e^{0001}\cup e^{0010}\cup e^{1000}\right)\cup\left(e^{0011}\cup e^{1001}\cup e^{1010}\right)\cup e^{1011}\\
\{z=w=p\} &= e^{0000}\cup\left(e^{1000}\cup e^{0100}\right)\cup e^{1100}
\end{aligned}$$

となっているから, これらの和集合である X は

$$X=e^{0000}\cup\left(e^{0001}\cup e^{0010}\cup e^{0100}\cup e^{1000}\right)\cup\left(e^{0011}\cup e^{0101}\cup e^{0110}\cup e^{1001}\cup e^{1010}\cup e^{1100}\right)\cup\left(e^{0111}\cup e^{1011}\right)$$

というセル分割を持つ. よって, このセル分割に関するチェイン複体を書くと

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \\
0 & \longleftarrow & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\partial} & \mathbb{Z}^4 & \xleftarrow{\partial} & \mathbb{Z}^6 & \xleftarrow{\partial} & \mathbb{Z}^2 & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

となる. 各セルは 1 セルの積であり各 1 セルの境界はゼロであるから, 上の複体に登場する写像はすべて零写像である[7]. よって, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(X)\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & (*=0)\\ \mathbb{Z}^4 & (*=1)\\ \mathbb{Z}^6 & (*=2)\\ \mathbb{Z}^2 & (*=3)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

[7] 一般に, セル e が 2 つのセルの積 $e_\alpha\times e_\beta$ と書けているとき, e の境界は次の式で与えられる:

$$\partial e=\partial e_\alpha\times e_\beta+(-1)^{\dim e_\alpha}e_\alpha\times\partial e_\beta$$

平成 25 年度 $\boxed{3}$

$\mathbb{R}^3$ 内の直線

$$\begin{aligned} l_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 = 0\}, \\ l_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3 = 0\}, \\ l_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 1\} \end{aligned}$$

を考える.

(1) $X = \mathbb{R}^3 \setminus (l_1 \cup l_2)$ の整数係数ホモロジー群を求めよ.

(2) $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$ の整数係数ホモロジー群を求めよ.

解答

(1) $U = \mathbb{R}^3 \setminus l_1, V = \mathbb{R}^3 \setminus l_2$ とおくと, {U, V} は $\mathbb{R}^3 \setminus$ point の開被覆であり,

$$U, V \simeq S^1, \ \ U \cap V = X, \ \ U \cup V \simeq S^2$$

となっている. そこで $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと

$$\begin{array}{cccc} & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\ 3 & H_3(U \cap V) & 0 & 0 \\ 2 & H_2(U \cap V) & 0 & \mathbb{Z} \\ 1 & H_1(U \cap V) \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & H_0(U \cap V) & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{Z} \end{array}$$

となる. まず f を含む

$$0 \to \mathbb{Z} \to H_1(U \cap V) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to 0$$

という短完全列を考えてみると, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が自由加群なので分裂しているので,

$$H_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$$

となる. 一方, 連結成分を観察すると g は

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示される ($\sim$ は基本変形). 以上より, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0) \\ \mathbb{Z}^3 & (* = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) $U = X, \ V = \mathbb{R}^3 \setminus l_3$ とおくと, {U, V} は $\mathbb{R}^3$ の開被覆であり, $U \cap V = Y$ となっているので, {U, V} に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと

$$
\begin{array}{cccc}
 & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\
3 & H_3(U \cap V) & 0 & 0 \\
2 & H_2(U \cap V) & 0 & 0 \\
1 & H_1(U \cap V) \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z} & 0 \\
0 & H_0(U \cap V) & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

となる. よって, 求める答えは次のようになる:

$$
H_*(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0) \\ \mathbb{Z}^4 & (* = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}
$$

平成 25 年度 $\boxed{4}$

境界のない 2 次元可微分多様体 M の上の滑らかなベクトル場 X_1, X_2 は M の各点で一次独立であり, $[X_1, X_2] = X_1$ を満たすものとする.

(1) θ_1, θ_2 は M 上の一次微分形式で, 各点において X_1, X_2 の双対基底となっているものとする. このとき次が成り立つことを示せ.

$$d\theta_1 + \theta_1 \wedge \theta_2 = 0.$$

(2) M は向き付け可能で非コンパクトであることを示せ.

解答

(1) $\eta = d\theta_1 + \theta_1 \wedge \theta_2$ とおく. まず, 微分形式 θ_1, θ_2 は M 上の各点で X_1, X_2 の双対基底となっているので

$$\theta_1(X_1) = 1, \quad \theta_1(X_2) = 0 \quad \theta_2(X_1) = 0 \quad \theta_2(X_2) = 1$$

が成立する. よって, 1 次微分形式の外微分およびウェッジ積の公式を思い出しながら, $\eta(X_1, X_2)$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\eta(X_1, X_2) &= (d\theta_1)(X_1, X_2) + (\theta_1 \wedge \theta_2)(X_1, X_2) \\
&= (X_1(\theta_1(X_2)) - X_2(\theta_1(X_1)) - (\theta_1([X_1, X_2])) + (\theta_1(X_1)\,\theta_2(X_2) - \theta_1(X_2)\,\theta_2(X_1)) \\
&= (X_1(0) - X_2(1) - \theta_1(X_1)) + (1 \times 1 - 0 \times 0) \\
&= (0 - 0 - 1) + (1 - 0) = 0
\end{aligned}$$

となる. ベクトル場 X_1, X_2 は M の各点で一次独立であることから, $\eta = d\theta_1 + \theta_1 \wedge \theta_2 = 0$ がしたがう.
(2) 例えば $\omega = \theta_1 \wedge \theta_2$ とおくと $\omega(X_1, X_2) = (\theta_1 \wedge \theta_2)(X_1, X_2) = 1$ であるから, ω は 2 次元可微分多様体 M の各点でゼロでない 2 次微分形式であることが分かる. よって, M は向き付け可能であることがしたがう. 次に M が非コンパクトになることを背理法により示そう. M がコンパクトであると仮定すると, M は向き付け可能なコンパクト可微分多様体であるから, Stokes の定理を適用できることに注意する. そこで上の $\omega = \theta_1 \wedge \theta_2$ を M で積分してみると M の境界 ∂M が空であるという仮定から

$$\int_M \omega = \int_M (-d\theta_1) = -\int_{\partial M} \theta_1 = 0$$

となる. ただし, 一つ目の等号で (1) の結果を用いている. 一方で, M の正の向き[8]を定める chart $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ とこれに従属する 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}$ をとって, 定義通りに $\int_M \omega$ を計算すると

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega > 0$$

となる. よって, 矛盾を得る.

[8] ここでは, ω が定める向きを正の向きとしている.

平成 24 年度 $\boxed{3}$

$$
\begin{aligned}
D(1) &= \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1| \leq 1,\ |z_2| = |z_3| = 1\}, \\
D(2) &= \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_2| \leq 1,\ |z_1| = |z_3| = 1\}
\end{aligned}
$$

とする. $\mathbb{C}^3$ の中の和集合

$$Z = D(1) \cup D(2)$$

の整数係数ホモロジー群を計算せよ.

解答

D^2 で $\mathbb{C}$ の単位円板, S^1 で $\mathbb{C}$ の単位円周を表わすことにする. まず,

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}(1) &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| \leq 1,\ |z_2| = 1\} \cong D^2 \times S^1, \\
\tilde{D}(2) &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_2| \leq 1,\ |z_1| = 1\} \cong S^1 \times D^2
\end{aligned}
$$

とおくと $\partial\tilde{D}(1) = S^1 \times S^1 = \partial\tilde{D}(2)$ なので $Y = \tilde{D}(1) \cup \tilde{D}(2)$ とおくと

$$Y = D^2 \times \partial D^2 \cup \partial D^2 \times D^2 = \partial(D^2 \times D^2) = \partial D^4 = S^3$$

となる. よって,

$$Z = Y \times \{z_3 \in \mathbb{C} \mid |z_3| = 1\} \cong S^3 \times S^1$$

となる. Künneth の公式より, 求める答えは次のようになる:

$$
H_*(Z) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 1, 3, 4) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}
$$

平成 24 年度 $\boxed{4}$

$S^1 = \{e^{2\pi it} \mid t \in [0,1]\}$ とし, その上に微分 1 形式 dt を考える. Σ をコンパクトで境界のない向きのついた滑らかな 2 次元多様体とする. $F : S^1 \to \Sigma$ を滑らかな埋め込みとする. $\Sigma \setminus F(S^1) = \{x \in \Sigma \mid x \notin F(S^1)\}$ は連結と仮定する.

(1) Σ 上の滑らかな微分 1 形式 θ_1 で

$$d\theta_1 = 0, \quad \int_{S^1} F^*\theta_1 = 1$$

なるものが存在することを示せ.

(2) Σ 上の滑らかな微分 1 形式 θ_2 で

$$d\theta_2 = 0, \quad F^*\theta_2 = dt$$

なるものが存在することを示せ.

解答

(1) 与えられた仮定より Σ は g 人乗りの浮き輪 $(g \geq 1)$ に同相で, $F(S^1)$ が定めるサイクルは $H_1(\Sigma)$ のゼロでない元を定める. $F(S^1)$ の Poincaré 双対を η_S とすると, その定義から

$$\int_\Sigma \omega \wedge \eta_S = \int_{F(S^1)} \omega = \int_{S^1} F^*\omega$$

がすべての $[\omega] \in H^1(\Sigma)$ について成立する. このとき $\int_{S^1} F^*\omega_0 \neq 0$ なる元 $[\omega_0] \in H^1(\Sigma)$ が存在する. 実際, 普遍係数定理より,

$$\left(H^1(\Sigma)\right)^* \cong H_1(\Sigma) \qquad \left([\omega] \mapsto \int_{F(S^1)} \omega = \int_{S^1} F^*\omega \right) \leftrightarrow [F(S^1)]$$

となるからである. そこで, $\theta_1 = \left(\int_{S^1} F^*\omega_0\right)^{-1} \omega_0$ とおけば,

$$d\theta_1 = \left(\int_{S^1} F^*\omega_0\right)^{-1} d\omega_0 = 0, \quad \int_{S^1} F^*\theta_1 = \left(\int_{S^1} F^*\omega_0\right)^{-1} \int_{S^1} F^*\omega_0 = 1$$

となる. よって, 求める θ_1 が得られた.

(2) (1) の θ_1 に対して,

$$\int_{S^1} (F^*\theta_1 - dt) = \int_{S^1} F^*\theta_1 - \int_{S^1} dt = 1 - 1 = 0$$

が成立するから, $\theta_1 - dt$ は完全形式である[9]. よって, ある 0 次微分形式 f が存在して

$$\theta_1 - dt = df$$

となる. ここで $F(S^1)$ の Σ における管状近傍 N をとると, Σ は向き付け可能な 2 次元多様体で $F(S^1)$ は Σ の向き付け可能な 1 次元部分多様体なので,

$$N \cong S^1 \times (-1,1) \qquad (\text{ただし, F(t) は (t, 0) に対応する})$$

[9] 同型 $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ は積分により与えられることを思い出せば分かる.

となる. さて, $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を [-1, 1] をサポートに持ちかつ $\rho(0) = 1$ となる C^∞ 級関数をひとつ取っておき, Σ 上の 0 次微分形式 $\bar{f} : \Sigma \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{cases} \bar{f}(F(t), s) = \rho(s) f(t) & (\ (F(t), s) \in N\ ) \\ \bar{f}(x) = 0 & (\ x \in \Sigma \setminus N\ ) \end{cases}$$

で定めると, $F^* \bar{f} = f$ となっている. よって,

$$\theta_2 = \theta_1 - d\bar{f}$$

とおけば, 閉形式に完全形式を足しただけなので θ_2 は閉形式であり,

$$F^* \theta_2 \ = \ F^* \theta_1 - F^* d\bar{f} \ = \ F^* \theta_1 - dF^* \bar{f} \ = \ df + dt - df \ = \ dt$$

となる.

平成 23 年度 $\boxed{3}$

n を 1 以上の整数とし, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ とする. また, 0 でない実数 a に対して, $a/|a|$ を a の符号と呼ぶことにする. C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ は原点 O を正則値にもつとする. すなわち, 任意の $x \in f^{-1}(O)$ における f の微分 df_x は非退化である.

(1) $f^{-1}(O) = \{O\}$ をみたすとき写像

$$F : S^n \to S^n$$

を

$$F(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \quad (x \in S^n)$$

で定める. このとき, F の写像度が $\det(df_O)$ の符号に等しいことを示せ.

(2) $f^{-1}(O) = \{P, Q\}$ $(P \neq Q)$ で $\max\{|P|, |Q|\} < 1$ をみたすとする. 写像

$$F : S^n \to S^n$$

を

$$F(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \quad (x \in S^n)$$

で定めるとき, F の写像度が $\det(df_P)$ の符号と $\det(df_Q)$ の符号の和になることを示せ.

解答

(1) $\mathbb{R}^{n+1}$ には自然な向きを入れておき, S^n には部分多様体としての向きを入れておくものとする. $O \in \mathbb{R}^{n+1}$ は $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ の正則点なので, 逆関数定理より O の $\mathbb{R}^{n+1}$ における十分小さい開球 U, V が存在して, f の制限

$$f|_U : U \to V$$

は微分同相写像になる. ここで

$$\begin{tikzcd}
U \setminus \{O\} \arrow[r, "\text{inclusion}"] \arrow[d, "f|_{U\setminus\{O\}}"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} \arrow[d, "f|_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{O\}}"] & S^n \arrow[l, "\text{inclusion}"'] \arrow[d, "F"] \\
V \setminus \{O\} \arrow[r, "\text{inclusion}"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} & S^n \arrow[l, "\text{inclusion}"']
\end{tikzcd}$$

という図式を考える. すると, 左側の四角形は可換である. 一方で, 右側の四角形は可換ではないがホモトピー可換にはなる. 実際, $H : S^n \times I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$ を

$$H(x, t) = \frac{f(x)}{t + (1 - t)|f(x)|}$$

で定めれば, これが右側の四角形のホモトピーを与える. ところで, この図式に登場する inclusion たちはすべて n 次 de Rham コホモロジー群の間に 1 倍写像を誘導するので, $f|_{U\setminus\{O\}}^* : H^n(V \setminus \{O\}) \to H^n(U \setminus \{O\})$ は $\deg F$

倍写像である. さて $f|_{U\setminus\{O\}} : U \setminus \{O\} \to V \setminus \{O\}$ は微分同相写像なので $f|_{U\setminus\{O\}}^* : H^n(V \setminus \{O\}) \to H^n(U \setminus \{O\})$ は 1 倍写像または -1 倍写像であるが,

$$
\begin{aligned}
f|_{U\setminus\{O\}}^* \text{ が 1 倍写像} \quad &\Leftrightarrow \quad f|_{U\setminus\{O\}} \text{ は原点 } O \text{ における向きを保つ} \\
&\Leftrightarrow \quad f \text{ は原点 } O \text{ における向きを保つ} \\
&\Leftrightarrow \quad \det(df_O) \text{ の符号は } 1
\end{aligned}
$$

であるから, $f|_{U\setminus\{O\}}^* : H^n(V\setminus\{O\}) \to H^n(U\setminus\{O\})$ は「 $\det(df_O)$ の符号」倍写像である. よって, $\deg F$ は $\det(df_O)$ の符号に等しい.

(2)　(1) と同様に, P, Q, O を中心とする十分小さい開球 U_P, U_Q, V が存在して, f の制限

$$
f|_{U_P} : U_P \to V, \qquad f|_{U_Q} : U_Q \to V
$$

は微分同相写像になる. そこで

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P, Q\} \arrow[d, "f|_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{P,Q\}}"] & S^n \arrow[l, "\text{inclusion}"'] \arrow[d, "F"] \\
U_P \setminus \{P\} \sqcup U_Q \setminus \{Q\} \arrow[ur, "\text{inclusion} \sqcup \text{inclusion}"] \arrow[r, "f|_{U_P\setminus\{P\}} \sqcup f|_{U_Q\setminus\{Q\}}"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} & S^n \arrow[l, "\text{inclusion}"']
\end{tikzcd}
$$

という図式を考える. すると (1) と同様に, 左側の三角形は可換, 右側の四角形はホモトピー可換になる. よって, この図式を n 次 de Rham コホモロジー群に誘導すると

$$
\begin{tikzcd}
 & H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P, Q\}) \arrow[dl, "1\text{ 倍} \oplus 1\text{ 倍}"'] \arrow[r, "1\text{ 倍}"] & H^n(S^n) \\
H^n(U_P \setminus \{P\}) \oplus H^n(U_Q \setminus \{Q\}) & H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}) \arrow[l, "f|_{U_P\setminus\{P\}}^* \oplus f|_{U_Q\setminus\{Q\}}^*"'] \arrow[u, "f|_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{P,Q\}}^*"] \arrow[r, "1\text{ 倍}"] & H^n(S^n) \arrow[u, "F^*"']
\end{tikzcd}
$$

となる. ここで「 1 倍」と書かれた写像は 1 倍写像を意味している. $f|_{U_P\setminus\{P\}}^*$ および $f|_{U_Q\setminus\{Q\}}^*$ は (1) の後半の議論からそれぞれ「 $\det(df_P)$ の符号」倍写像および「 $\det(df_Q)$ の符号」倍写像なので, 上の図式から, $\deg F$ は $\det(df_P)$ の符号と $\det(df_Q)$ の符号の和に等しい.

平成 23 年度 $\boxed{4}$

境界つき多様体の境界を ∂M と書く. D を 2 次元単位閉円板, I を閉区間 $[0,1]$ とし, I において 0 と 1 を同一視した商空間を 1 次元トーラス T^3 とし, 通常の可微分構造を考える. 同相写像 $h_1 : \partial D \to T^3$ を 1 つ与える.

(1) 3 次元トーラス $T^3 = T^1 \times T^1 \times T^1$ の境界つき部分多様体で 3 次元単位閉球体に可微分同相なものを $\bar{B_1}, \bar{B_2}$ とし, これらは $\bar{B_1} \cap \bar{B_2} = \emptyset$ をみたすとする. また $\bar{B_1}, \bar{B_2}$ の内部を B_1, B_2 とする.

$$X = T^3 \setminus (B_1 \cup B_2)$$

とおくとき X の有理係数ホモロジー群を求めよ.

(2) $x, y \in \partial(I \times I) = (\{0,1\} \times I) \cup (I \times \{0,1\})$ のとき $x \sim_1 y$ とする. これにより $I \times I$ に同値関係 $\sim_1$ を定める. 商空間 $(I \times I)/\sim_1$ を S^2 とし, $T^2 = T^1 \times T^1$ とする. これにより, 自然な写像 $f : T^1 \to S^2$ を与える. 同相写像 $h_2 : S^2 \to \partial(T^3 \setminus B_1)$ を 1 つ与え, 次の合成写像を g とする.

$$\partial(T^1 \times D) = T^1 \times \partial D \xrightarrow{\mathrm{id}_{T^1} \times h_1} T^2 \xrightarrow{f} S^2 \xrightarrow{h_2} \partial(T^3 \setminus B_1) \hookrightarrow \partial X$$

この g を用いて $x \in \partial(T^1 \times D)$, $y = g(x)$ のとき $x \sim_2 y$ とする. これにより $X \sqcup (T^2 \times D)$ に同値関係 $\sim_2$ を定める.

商空間 $Y = X \sqcup (T^2 \times D)/\sim_2$ の有理係数ホモロジー群を求めよ.

解答

$$U = T^3 \setminus B_1, \quad V = T^3 \setminus B_2$$

とおくと, $\bar{B_1} \cap \bar{B_2} = \emptyset$ であることから $\{U, V\}$ は T^3 の開被覆であり,

$$U, V \simeq T^3 \setminus \{\mathrm{point}\}, \quad U \cap V = X$$

が成立している. そこで, まず準備として $T^3 \setminus \{\mathrm{point}\}$ の有理係数ホモロジー群を求めることにする. T^3 に 3 つの $T^1 = \{0\ \mathrm{cell}\} \cup \{1\ \mathrm{cell}\}$ をかけて得られるセル構造を入れておくと $T^3 \setminus \{\mathrm{point}\}$ は T^3 の 2 骨格 $\tilde{X}$ にホモトピー同値であるから

$$H_*(T^3 \setminus \{\mathrm{point}\}) \;\cong\; H_*(\tilde{X}) \;\cong\; \begin{cases} \mathbb{Q} & (* = 0) \\ \mathbb{Q}^3 & (* = 1, 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となることが分かる. さて $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと

$$\begin{array}{cccc}
 & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\
3 & H_3(U \cap V) & 0 & \mathbb{Q} \\
2 & H_2(U \cap V) & \mathbb{Q}^3 \oplus \mathbb{Q}^3 \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{Q}^3 \\
1 & H_1(U \cap V) & \mathbb{Q}^3 \oplus \mathbb{Q}^3 \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{Q}^3 \\
0 & H_0(U \cap V) & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \xrightarrow{\quad h \quad} & \mathbb{Q}
\end{array}$$

となる. U, V は T^3 から 3 セルを除いただけなので 2 次元以下のそのまま送られることから f, g, h を行列表示すると

$$f, g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる ($\sim$ は基本変形). よって, f, g, h はすべて全射なので, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (* = 0) \\ \mathbb{Q}^3 & (* = 1) \\ \mathbb{Q}^4 & (* = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) $g : \partial(T^1 \times D) \to \partial X$ をよく見てみると, $T^1 \vee \partial D$ の部分を一点につぶし, その他の部分は同相にうつしていることが分かる. このことから, Y は $Z = T^1 \times D / T^1 \vee \partial D$ と X を境界の S^2 で貼り合わせてできると考えられる. そこでまず準備として, Z の有理係数ホモロジー群を求めることにする:

$$T^1 = e^0_\alpha \cup e^1_\alpha, \quad D = e^0_\beta \cup e^1_\beta \cup e^2_\beta$$

とセル分割しておくと, $T^1 \times D$ には

$$T^1 \times D = e^{00} \cup (e^{01} \cup e^{10}) \cup (e^{02} \cup e^{11}) \cup e^{12}$$

というセル分割が誘導される. ただし, ここで $e^{ij} = e^i_\alpha \times e^j_\beta$ $(0 \le i \le 1,\ 0 \le j \le 2)$ とおいた. Z はこのうち e^{01}, e^{10} を一点につぶして得られるので, Z は

$$T^1 \times D = e^{00} \cup (e^{02} \cup e^{11}) \cup e^{12}$$

というセル分割を持つ. このセル分割に関するチェイン複体を書くと

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathbb{Q} & \xleftarrow{\partial} & 0 & \xleftarrow{\partial} & \mathbb{Q}^2 & \xleftarrow{\partial_3} & \mathbb{Q} & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

となる. これらの写像の中で調べるべきなのは ∂_3 であるが, $\partial e^{12} = \partial e^1_\alpha \times e^2_\beta - e^1_\alpha \times \partial e^2_\beta = -e^{11}$ であるから ∂_3 は零写像ではない. よって, ∂_3 は単射であるので, Z の有理係数ホモロジー群は次のようになる:

$$H_*(Z) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (* = 0, 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

さて, Z における $\partial Z = T^1 \times \partial D / T^1 \vee \partial D$ の開カラー近傍を C_1, X における ∂B_1 の開カラー近傍を C_2 として

$$U = Z \cup C_2, \quad V = C_1 \cup X$$

とおくと, $\{U, V\}$ は Y の開被覆であり,

$$U \simeq Z \quad V \simeq X, \quad U \cap V \simeq S^2$$

となるので, $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと,

$$
\begin{array}{cccc}
 & H_*(U\cap V) & H_*(U)\oplus H_*(V) & H_*(U\cup V) \\
3 & 0 & 0 & H_3(U\cup V) \\
2 & \mathbb{Q} \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}^4 & H_2(U\cup V) \\
1 & 0 & \mathbb{Q}^3 & H_1(U\cup V) \\
0 & \mathbb{Q} \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q} & H_0(U\cup V)
\end{array}
$$

となる. まず f の方を調べよう. $H_2(U\cap V)$ の生成元を $H^2(V)$ へ送ってみると, ∂B_1 が代表するホモロジー類にうつるが, このホモロジー類はゼロではないので f は零写像ではない[10]. よって f は単射である. 一方, g は連結成分を観察すれば, 単射であることが分かる. 以上より, 求める答えは次のようになる:

$$
H_*(Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (* = 0) \\ \mathbb{Q}^3 & (* = 1) \\ \mathbb{Q}^4 & (* = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}
$$

[10] ちなみに, $H_2(U\cap V)$ の生成元を $H^2(U)$ へ送ってみると, e^{11} が代表するホモロジー類に一致するが, このホモロジー類はゼロである.

平成 22 年度 $\boxed{3}$

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ を 2 次元単位球面とし, $D^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ を 3 次元単位球体とする. 写像 $g : S^2 \to \mathbb{R}$ を

$$g(x,y,z) = (x^2-y^2, 2xy, z\sqrt{2-z^2})$$

で定める.
連続写像 $f : D^3 \to \mathbb{R}^3$ について, その S^2 への制限が g に一致するとき, $f(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$ となる $(x_0,y_0,z_0) \in D^3$ が存在することを示せ.

解答

任意の $(x,y,z) \in S^2$ に対して,

$$\|g(x,y,z)\|^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 + (z\sqrt{2-z^2})^2 = (x^2+y^2)^2 + z^2(2-z^2) = (1-z^2)^2 + z^2(2-z^2) = 1$$

であるから, 実は $g : S^2 \to S^2$ であることが分かる. このとき, g の写像度 $\deg g$ が 2 になることを示そう:
まず, $(1,0,0) \in S^2$ が g の正則値であることを示す. そのためには

$$g^{-1}(1,0,0) = \{(x,y,z) \in S^2 \mid x^2-y^2 = 1, 2xy = 0, z\sqrt{2-z^2} = 0\} = \{(x,y,z) \in S^2 \mid x^2 = 1, y = z = 0\}$$

に属する点, すなわち $p_+ = (1,0,0)$ および $p_- = (-1,0,0)$ が g の正則点であることを示せばよい. そこで, $p_\pm$ のまわりの chart $(U_\pm, \varphi_\pm)$ として,

$$U_+ = \{(x,y,z) \in S^2 \mid x > 0\}, \quad \varphi_+ : U_+ \to \mathbb{R}^2 \ (\ (x,y,z) \mapsto (y,z)\ )$$
$$U_- = \{(x,y,z) \in S^2 \mid x < 0\}, \quad \varphi_- : U_+ \to \mathbb{R}^2 \ (\ (x,y,z) \mapsto (y,z)\ )$$

なるものをとっておく. まず, p_+ が g の正則点であることを示そう.

$$\varphi_+ \circ g \circ {\varphi_+}^{-1}(s,t) = \varphi_+ \circ g(\sqrt{1-s^2-t^2}, s, t) = (2s\sqrt{1-s^2-t^2}, t\sqrt{2-t^2})$$

である[11]から,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank} dg_{p_+} &= \operatorname{rank} J(\varphi_+ \circ g \circ {\varphi_+}^{-1})_{\varphi_+(p_+)} \\
&= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2\sqrt{1-s^2-t^2} - \frac{2s^2}{\sqrt{1-s^2-t^2}} & -\frac{2st}{\sqrt{1-s^2-t^2}} \\ 0 & \sqrt{2-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{2-t^2}} \end{pmatrix}_{(0,0)} \\
&= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2
\end{aligned}$$

と計算される. よって, p_+ は g の正則点である. 最後の行列の行列式は正であることから $\varphi_+ \circ g \circ {\varphi_+}^{-1}$ は p_+ における向きを保つので, g の p_+ における局所写像度 $\deg g_{p_+}$ は 1 である. 次に, p_- が g の正則点であることを示そう.

$$\varphi_+ \circ g \circ {\varphi_-}^{-1}(s,t) = \varphi_+ \circ g(-\sqrt{1-s^2-t^2}, s, t) = (-2s\sqrt{1-s^2-t^2}, t\sqrt{2-t^2})$$

[11] この合成は原点 $(0,0)$ の周りの十分小さい近傍の上で考えている.

であるから,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} dg_{p_-} &= \operatorname{rank} J(\varphi_+ \circ g \circ \varphi_-{}^{-1})_{\varphi_-(p_-)} \\ &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -2\sqrt{1-s^2-t^2} + \frac{2s^2}{\sqrt{1-s^2-t^2}} & \frac{2st}{\sqrt{1-s^2-t^2}} \\ 0 & \sqrt{2-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{2-t^2}} \end{pmatrix}_{(0,0)} \\ &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\end{aligned}$$

と計算される. よって, p_- も g の正則点である. 最後の行列の行列式は負であることから $\varphi_+ \circ g \circ \varphi_-{}^{-1}$ は p_+ における向きを逆にするが, φ_+, φ_- の一方は向きを保ちもう一方は向きを逆にするので, 結局 g の p_- における局所写像度 $\deg g_{p_-}$ も 1 である. ところで, 写像度は局所写像度の和として書けるから, 以上の議論により, $\deg g = 2$ であることが示された.

さて, 任意の $(x, y, z) \in D^3$ に対して, $f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ と仮定すると, g は合成

$$S^2 \xrightarrow{\text{inclusion}} D^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

として書ける. これを 2 次ホモロジー群に誘導すると, $H_2(D^3) = 0$ であるから g_* は零写像になってしまう. これは $\deg g = 2$ であることに矛盾する.

平成 22 年度 $\boxed{4}$

n を 2 以上の自然数とする. このとき 2 次元球面上の相異なる n の点 $P_1, \ldots, P_n$ を選び, それらを同一視して得られる空間 X の整係数ホモロジー群を計算せよ.

解答

$$X \simeq S^2 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1 \quad (S^2 \text{ が } 1 \text{ 個と } S^1 \text{ が } n-1 \text{ 個のウェッジ和 })$$

であるから, $Y = S^2 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1$ のホモロジー群を計算すればよい.

$$Y = e^0 \cup (e^1_1 \cup \cdots \cup e^1_{n-1}) \cup e^2$$

というセル分割に関するチェイン複体を書くと,

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 1 & & 2 & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\partial} & \mathbb{Z}^{n-1} & \xleftarrow{\partial} & \mathbb{Z} & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

となる. 境界写像 ∂ はすべて零写像なので, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(X) \;\cong\; H_*(Y) \;\cong\; \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 2) \\ \mathbb{Z}^{n-1} & (* = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

平成 21 年度 $\boxed{3}$

D^2 を複素平面内の境界を含めた単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とし, S^1 をその境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする. n を 1 以上の整数とし,

$$X_1 = X_2 = D^2 \times \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n-1 \text{ 個}}$$

とおき, X_1, と X_2 の境界を

$$\partial X_1 = \partial X_2 = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ 個}}$$

と表わす. σ を n 次の置換とするとき,

$$f_\sigma(z_1, \ldots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)})$$

によって写像

$$f_\sigma : \partial X_1 \to \partial X_2$$

を定める. X_1 と X_2 を, その境界の間の同相写像 f_σ で貼り合わせて得られる空間を X とする. 以下の場合に X の整係数ホモロジー群を求めよ.

(1) $n = 2$ で, σ が 1 と 2 の互換の場合

(2) $n = 3$ で, σ が 一般の置換の場合

解答

(1)[12] X_1, X_2 における $\partial X_1, \partial X_2$ の開カラー近傍をそれぞれ C_1, C_2 として

$$U = X_1 \cup C_2, \quad V = C_1 \cup X_2$$

とおくと, $\{U, V\}$ は Y の開被覆であり,

$$U, V \simeq D^2 \times S^1 \quad U \cap V \simeq S^1 \times S^1$$

となるので, $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと,

$$\begin{array}{cccc}
 & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\
3 & 0 & 0 & H_3(U \cup V) \\
2 & \mathbb{Z} & 0 & H_2(U \cup V) \\
1 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_1(U \cup V) \\
0 & \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_0(U \cup V)
\end{array}$$

X は 2 つの $D^2 \times S^1$ をメリディアンとロンジチュードを入れ替えながら貼り合わせて得られる空間なので, f, g を行列表示すると,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[12]Heegaard 分解を知っていれば, $X \cong S^3$ であることが分かるので, この問題は自明になる.

となる ($\sim$ は基本変形). よって, 求める答えは次のようになる:

$$H_*(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 3) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) X_1, X_2 における $\partial X_1, \partial X_2$ の開カラー近傍をそれぞれ C_1, C_2 として

$$U = X_1 \cup C_2, \quad V = C_1 \cup X_2$$

とおくと, $\{U, V\}$ は Y の開被覆であり,

$$U, V \simeq D^2 \times S^1 \times S^1 \quad U \cap V \simeq S^1 \times S^1 \times S^1$$

となるので, $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと,

$$\begin{array}{cccc} & H_*(U \cap V) & H_*(U) \oplus H_*(V) & H_*(U \cup V) \\ 4 & 0 & 0 & H_4(U \cup V) \\ 3 & \mathbb{Z} & 0 & H_3(U \cup V) \\ 2 & \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_2(U \cup V) \\ 1 & \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 & H_1(U \cup V) \\ 0 & \mathbb{Z} & \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & H_0(U \cup V) \end{array}$$

となる. ここで

$$0 \to \operatorname{Coker} f \to H_2(U \cup V) \to \operatorname{Ker} g \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Coker} g \to H_1(U \cup V) \to \operatorname{Ker} h \to 0$$

という短完全列を考えると, $\operatorname{Ker} g, \operatorname{Ker} h$ が自由アーベル群だからこれらの短完全列は分裂する. よって

$$H_1(U \cup V) = \operatorname{Ker} h \oplus \operatorname{Coker} g, \quad H_2(U \cup V) = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Coker} f$$

となる. そこで, $S^1 \times S^1 \times S^1$ のサイクルとして

$$e_1^1 = S^1 \times * \times *, \quad e_2^1 = * \times S^1 \times *, \quad e_3^1 = * \times * \times S^1$$

$$e_1^2 = * \times S^1 \times S^1, \ \ e_2^2 = S^1 \times * \times S^1, \ \ e_3^2 = S^1 \times S^1 \times *$$

なるものをとれば,

$$H_1(U \cap V) = \mathbb{Z} < e_1^1, e_2^1, e_3^1 >, \ \ H_1(U) = H_1(V) = \mathbb{Z} < e_2^1, e_3^1 >,$$

$$H_2(U \cap V) = \mathbb{Z} < e_1^2, e_2^2, e_3^2 >, \quad H_2(U) = H_2(V) = \mathbb{Z} < e_1^2 >,$$

となる. この基底に関して f, g, h を行列表示していこう. 以下, 3 次の置換 σ ごとに場合分けして考える.

$\underline{\sigma = \mathrm{id} \text{ のとき:}}$

X_1 と X_2 の貼り合わせ方より

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示される (∼ は基本変形). よって, Ker および Coker は次のように計算される.

$$\operatorname{Ker} f \cong \mathbb{Z}^2, \qquad \operatorname{Ker} g \cong \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{Ker} h \cong 0$$
$$\operatorname{Coker} f \cong \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Coker} g \cong \mathbb{Z}^2, \quad \operatorname{Coker} h \cong \mathbb{Z}$$

$\sigma = (2,3)$ のとき:

X_1 と X_2 の貼り合わせ方より

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示される (∼ は基本変形). よって, Ker および Coker は次のように計算される.

$$\operatorname{Ker} f \cong \mathbb{Z}^2, \qquad \operatorname{Ker} g \cong \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{Ker} h \cong 0$$
$$\operatorname{Coker} f \cong \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Coker} g \cong \mathbb{Z}^2, \quad \operatorname{Coker} h \cong \mathbb{Z}$$

$\sigma = (1,3)$ のとき:

X_1 と X_2 の貼り合わせ方より

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示される (∼ は基本変形). よって, Ker および Coker は次のように計算される.

$$\operatorname{Ker} f \cong \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{Ker} g \cong 0, \qquad \operatorname{Ker} h \cong 0$$
$$\operatorname{Coker} f \cong 0, \quad \operatorname{Coker} g \cong \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Coker} h \cong \mathbb{Z}$$

$\sigma = (1,2)$ のとき:

X_1 と X_2 の貼り合わせ方より

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示される (∼ は基本変形). よって, Ker および Coker は次のように計算される.

$$\operatorname{Ker} f \cong \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{Ker} g \cong 0, \qquad \operatorname{Ker} h \cong 0$$
$$\operatorname{Coker} f \cong 0, \quad \operatorname{Coker} g \cong \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Coker} h \cong \mathbb{Z}$$

$\sigma = (1,2,3)$ のとき:

X_1 と X_2 の貼り合わせ方より

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示される ($\sim$ は基本変形). よって, Ker および Coker は次のように計算される.

$$\operatorname{Ker} f \cong \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{Ker} g \cong 0, \qquad \operatorname{Ker} h \cong 0$$

$$\operatorname{Coker} f \cong 0, \quad \operatorname{Coker} g \cong \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Coker} h \cong \mathbb{Z}$$

$\sigma = (1,3,2)$ のとき:

X_1 と X_2 の貼り合わせ方より

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示される ($\sim$ は基本変形). よって, Ker および Coker は次のように計算される.

$$\operatorname{Ker} f \cong \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{Ker} g \cong 0, \qquad \operatorname{Ker} h \cong 0$$

$$\operatorname{Coker} f \cong 0, \quad \operatorname{Coker} g \cong \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Coker} h \cong \mathbb{Z}$$

以上より, 求める答えは次のようになる:

σ が 1 を動かさないとき:

$$H_*(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0,4) \\ \mathbb{Z}^2 & (* = 1,2,3) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

σ が 1 を動かすとき:

$$H_*(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0,1,3,4) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

平成 21 年度 $\boxed{4}$

3 次元球面 S^3 を $\{(z_1, z_2) \in | \, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ と同一視する. S^3 から S^3 への C^{infty} 級写像 f を

$$f(z_1, z_2) = (z_1^2 - |z_2|^2, \ z_1 z_2 + \bar{z_1} z_2)$$

で定義する. このとき f の臨界点を求めよ.

解答

$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ とおくと,

$$z_1^2 - |z_2|^2 = (x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) + i(2x_1y_1), \qquad z_1z_2 + \bar{z_1}z_2 = (2x_1x_2) + i(2x_1y_2)$$

と計算されるから, $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ と思うと, $f : S^3 \to S^3$ は

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2, \ 2x_1y_1, \ 2x_1x_2, \ 2x_1y_2)$$

と表示される. そこで $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を自然な拡張とし, $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を

$$g(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 1$$

で定めると, $g^{-1}(0) = S^3$ でありかつ 0 は g の正則値なので, 付録 A.2 より

$$\operatorname{rank} df_p = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} JF_p \\ Jg_p \end{pmatrix} - 1$$

となる. よって, 各 $p = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S^3$ について

$$\begin{aligned}
p \text{ が } f \text{ の臨界点} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank} df_p < 3 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} JF_p \\ Jg_p \end{pmatrix} < 4 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2x_1 & -2y_1 & -2x_2 & -2y_2 \\ 2y_1 & 2x_1 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2x_1 & 0 \\ 2y_2 & 0 & 0 & 2x_1 \\ 2x_1 & 2y_1 & 2x_2 & 2y_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & x_1 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & x_1 \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} < 4 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 \neq 0
\end{aligned}$$

となる. f の臨界点の集合は次のようになる:

$$\{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in S^3 \mid x_1 = 0\} \ = \ \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid \operatorname{Re} z_1 = 0\}$$

平成 20 年度 $\boxed{3}$

5 次元球面 $S^5 = \left\{(x_0, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^6 \mid {x_0}^2 + \cdots + {x_5}^2 = 1\right\}$ とその上の点 $a_0 = (1, 0, \ldots, 0), a_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ を考える. $U_0 = S^5 \setminus \{a_0\}, U_1 = S^5 \setminus \{a_1\}$ とおく. 位相空間 E と連続写像 $\pi : E \to S^5$ が次の条件を満たすとする.
(条件) 同相写像

$$\psi_0 : \pi^{-1}(U_0) \to U_0 \times S^3, \ \ \psi_1 : \pi^{-1}(U_1) \to U_1 \times S^3$$

が存在し,

$$\left(\mathrm{Pr}_1 \circ \psi_j\right)(u) = \pi(u)$$

が $j = 0, 1, \ \ u \in \pi^{-1}(U_j)$ に対して成立する. ここで, S^3 は 3 次元球面, $\mathrm{Pr}_1 : U_j \times S^3 \to U_j$ は第一成分への射影を表す.
次の問に答えよ.

(1) E はコンパクトなハウスドルフ空間であることを示せ.

(2) E の有理数係数のコホモロジー群を求めよ.

解答

(1) まず E がコンパクトであることを示す. $\varepsilon > 0$ に対して

$$K_0 = \{(x_0, \ldots, x_5) \in S^5 \mid x_0 \leq 1 - \varepsilon\}, \quad K_1 = \{(x_0, \ldots, x_5) \in S^5 \mid x_1 \leq 1 - \varepsilon\}$$

とおくと, K_0, K_1 はコンパクト集合 S^5 の閉集合なのでコンパクトである. よって, 与えられた条件より

$$\pi^{-1}(K_0) \cong K_0 \times S^3, \quad \pi^{-1}(K_1) \cong K_1 \times S^3$$

はコンパクトである. $\varepsilon > 0$ を十分小さく取っておけば, $K_0 \cup K_1 = S^5$ となるので,

$$E = \pi^{-1}(S^5) = \pi^{-1}(K_0 \cup K_1) = \pi^{-1}(K_0) \cup \pi^{-1}(K_1)$$

となる[13]. つまり, E は 2 つのコンパクト集合の和で書ける. よって, E はコンパクトである.
次に E が Hausdorff であることを示す. 任意に相異なる 2 点 $e, e' \in E$ をとる. もし $\pi(e) = \pi(e')$ ならば,

$$e, e' \in \pi^{-1}(U_0) \cong U_0 \times S^3 \ \ \text{または} \ \ e, e' \in \pi^{-1}(U_1) \cong U_1 \times S^3$$

となるから, $U_0 \times S^3$ および $U_1 \times S^3$ の Hausdorff 性より $e, e' \in E$ は開集合で分離される. もし $\pi(e) \neq \pi(e')$ ならば, S^5 の Hausdorff 性より $\pi(e), \pi(e')$ は S^5 の開集合 U, V を用いて分離される. このとき, $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$ が $e, e' \in E$ を分離する. 以上より, E は Hausdorff である.
(2) $U = \pi^{-1}(U_0), V = \pi^{-1}(U_1)$ とおくと, $\{U, V\}$ は E の開被覆であり

$$U, V \cong \mathbb{R}^5 \times S^3 \simeq S^3, \quad U \cap V \cong (\mathbb{R}^5 \setminus \mathrm{point}) \times S^3 \simeq S^4 \times S^3$$

となるので, $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書くと

[13] 与えられた条件より, $\pi : E \to S^5$ は全射になるから $E = \pi^{-1}(S^5)$ となる.

$$
\begin{array}{cccc}
 & H^*(U\cap V) & H^*(U)\oplus H_*(V) & H^*(U\cup V) \\
8 & 0 & 0 & H^8(U\cup V) \\
7 & \mathbb{Q} & 0 & H^7(U\cup V) \\
6 & 0 & 0 & H^6(U\cup V) \\
5 & 0 & 0 & H^5(U\cup V) \\
4 & \mathbb{Q} & 0 & H^4(U\cup V) \\
3 & \mathbb{Q} & \xleftarrow{\ f\ } \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q} & H^3(U\cup V) \\
2 & 0 & 0 & H^2(U\cup V) \\
1 & 0 & 0 & H^1(U\cup V) \\
0 & \mathbb{Q} & \xleftarrow{\ g\ } \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q} & H^0(U\cup V)
\end{array}
$$

となる. $H^3(U), H^3(V), H^3(U\cap V)$ の生成元はファイバー S^3 に対応する元なので f, g はともに全射であることが分かる. よって, 求める答えは次のようになる:

$$
H^*(E) \;\cong\; \begin{cases} \mathbb{Q} & (* = 0, 3, 5, 8) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}
$$

平成 20 年度 $\boxed{\mathbf{4}}$

$S^n = \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_0}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\right\}$ を n 次元球面とする. T_pS^n を点 $p \in S^n$ の接空間とし,

$$TS^n = \bigcup_{p \in S^n} T_pS^n$$

とおく. $M = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n z_i^2 = 1\}$ が TS^n と微分同相であることを示せ.

解答

$z_0 = x_0 + iy_0, \ldots, z_n = x_n + iy_n$ という対応により $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ と同一視すると, M は次のように書き直せる:

$$M = \{(x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid {x_0}^2 + \cdots + {x_n}^2 = {y_0}^2 + \cdots + {y_n}^2 + 1,\ \ x_0y_0 + \cdots + x_ny_n = 0\}$$

写像 $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を

$$g(x_0, \ldots, x_n) = {x_0}^2 + \cdots + {x_n}^2 - 1$$

で定めると, 0 は g の正則値であるから, 付録 A.1 より各 $p = (s_0, \ldots, s_n) \in S^n$ に対して

$$T_pS^n = \operatorname{Ker} dg_p = \operatorname{Ker}\,(s_0\ \cdots\ s_n)$$

となる. よって, TS^n は $\mathbb{R}^{2n+2}$ の部分空間として次のように書ける:

$$TS^n = \{(s_0, \ldots, s_n, y_0, \ldots, a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid {s_0}^2 + \cdots + {s_n}^2 = 1,\ \ a_0s_0 + \cdots + a_ns_n = 0\}$$

そこで $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ を次で定めよう:

$$\Phi(x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{{y_0}^2 + \cdots + {y_n}^2 + 1}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{{y_0}^2 + \cdots + {y_n}^2 + 1}}, y_0, \ldots, y_n\right)$$
$$\Psi(s_0, \ldots, s_n, a_0, \ldots, a_n) = \left(s_0\sqrt{{a_0}^2 + \cdots + {a_n}^2 + 1}, a_0, \ldots s_n\sqrt{{a_0}^2 + \cdots + {a_n}^2 + 1}, a_n\right)$$

すると, Φ, Ψ はどちらも滑らかであり, M と TS^n はこの対応により互いにうつり合うことが確かめられる. 以上により, M と TS^n は微分同相である.

A 覚えておくと便利な命題・定理

次の命題は多様体論の授業で習うのではないかと思われるが, 復習の意味も込めて書いておく.

命題 A.1. m 次元多様体 M が可微分写像 $g : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^k$ と正則値 $c \in \mathbb{R}^k$ を用いて, $M = g^{-1}(c)$ と書けているとする. このとき, 次が成立する:

$$\text{すべての } p \in M \text{ について}, \ T_pM = \operatorname{Ker} Jg_p$$

証明. 任意に $p \in M$ をとっておく. $M = g^{-1}(c)$ なのだから, $T_pM \subseteq \operatorname{Ker}(dg_p)$ はすぐに分かる. $c \in \mathbb{R}^k$ が正則値ということから, 微分 Jg_p は全射なので,

$$\dim \operatorname{Ker} Jg_p = \dim \mathbb{R}^{k+m} - \dim \mathbb{R}^k = m$$

となる (線型代数の次元公式). 一方で, $\dim T_pM = m$ なので, 両者の次元が一致していることが分かる. よって, $T_pM = \operatorname{Ker} Jg_p$ を得る. □

この A.1 を用いて次の「多様体の間の（可微分）写像の微分の階数が chart をとらずに計算できる」というとても有用な定理が示される.

定理 A.2. m 次元多様体 M が可微分写像 $g : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^k$ と正則値 $c \in \mathbb{R}^k$ を用いて, $M = g^{-1}(c)$ と書けているとする. このとき, 可微分写像 $f : M \to \mathbb{R}^n$ が拡張 $\tilde{f} : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^n$ を持つならば, 次が成立する：

$$\text{すべての } p \in M \text{ について}, \ \operatorname{rank} df_p = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} J\tilde{f}_p \\ Jg_p \end{pmatrix} - k$$

証明. 任意に $p \in M$ をとっておく. まず, $\operatorname{Ker} df_p = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} J\tilde{f}_p \\ Jg_p \end{pmatrix}$ を示そう. A.1 より, $T_pM = \operatorname{Ker} dg_p$ が成立していることに注意すると,

$$\operatorname{Ker} df_p = \operatorname{Ker} J\tilde{f}_p \cap T_pM = \operatorname{Ker} J\tilde{f}_p \cap \operatorname{Ker} Jg_p = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} J\tilde{f}_p \\ Jg_p \end{pmatrix}$$

が成立する. 一つ目の等号は次の図式から明らかであろう:

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "\text{inclusion}"] \arrow[dr, "df_p"'] & T_p\mathbb{R}^{k+m} \arrow[d, "J\tilde{f}_p"] \\
& T_{f(p)}\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

よって, A.1 と線型代数の次元公式を用いることにより,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}(df_p) &= \dim T_p M - \dim \mathrm{Ker}\, df_p \\
&= m - \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} J\tilde{f}_p \\ Jg_p \end{pmatrix} \\
&= m - \left(\dim T_p \mathbb{R}^{k+m} - \mathrm{rank} \begin{pmatrix} J\tilde{f}_p \\ Jg_p \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{rank} \begin{pmatrix} J\tilde{f}_p \\ Jg_p \end{pmatrix} - k
\end{aligned}$$

を得る. □