C*-環の K 理論 ~ AF 環の分類 ~

賀茂次郎 (@ryoOOochh)

平成 28 年 3 月 23 日

概 要

Hilbert 空間上の有界線型作用素全体から成る空間の閉部分空間を C*-環 といい，AF 環は有限次元 C*-環 により近似される C*-環 のことです．C*-環 の元を成分とする行列の射影全体をある同値関係で割り，これを拡張したものを K_0- 群といい，AF 環はこの K_0- 群により完全に分類されます．

以下，係数体は $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とかく．

1 C*-環 の性質

定義 1.1. *Hilbert* 空間 H 上の有界線型作用素全体のなす空間 $B(H)$ の共役，積について閉じた閉部分ベクトル空間のことを C*-環 という．

- 共役は行列でいう随伴行列のこと．
- 一般に C*-環 は単位元を持つとは限らないが，今回は C*-環 といったときには単位元をもつとする．
- 単位元を持つとしても，id_H とは限らない．例えば p を射影としたとき，C*-環 $pB(H)p$ の単位元は p である．
- C*-環 の本来の定義はつぎのようなものである．Banach 空間 A が次の (1) ~ (4) を満たすとき，C*-環 という．
  - (1)$A^2 \to A\,(a,b) \mapsto ab$ が定まっており連続で，結合律を満たす．
  - (2)$\forall a,b \in A,\ ||ab|| \leq ||a||||b||$．
  - (3)(対合) 共役線型写像 $* : A \to A,\ a \mapsto a^*$ で，$a^{**} = a,\ (ab)^* = b^*a^*\ (a,b \in A)$ を満たすものを持つ．
  - (4)(C* 条件)$||x^*x|| = ||x||^2$．
- (Gelfand-Naimark の定理) この定義で任意の C*-環 に対してあるヒルベルト空間 H が存在して，$B(H)$ への単射が存在する．
- 準同型定理と後で述べる単射ならば等長から上の包含写像の像が C*-環 になっていることが分かる．
- (Neumann 級数)$||1-a|| < 1$ ならば，a は可逆で $a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-a)^k$ となる ($1-x^n$ の因数分解)．
- u が部分等長 $\underset{def}{\Leftrightarrow} ||u(x)|| = ||x||(x \in (Ker(u))^{\perp}) \Leftrightarrow u^*u$ が射影 $\Leftrightarrow uu^*u = u$．
- $uu^*u = u \Leftrightarrow u^*uu* = u^*$ なので，上の同値条件で u と u^* を入れ替えたものも成り立つ．

定義 1.2. $A,\ B$ を C*-環 とする．複素線形写像 $T : A \to B$ が積と共役を保つとき，準同型という．さらに，T が全単射であるとき，A と B は同型であるという．

- C*-環 から C*-環 への準同型は norm-decreasing($||Tu|| \leq ||u||$) である．

- C*-環 から C*-環 への単射準同型は等長（つまり，$||Tu|| = ||u||$）である．

- 任意の有限次元 C*-環 A に対して，ある n_1，n_2，...，n_k が存在して，A は $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ と同型である．

次の定理はこの C*-環 の定義だとよく分からないが，$C(\Omega)$ はノルムを $||f||_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$，共役を複素共役と定めることで C*-環 になる．

定理 1.3. 任意の可換 C*-環 A に対して，あるコンパクトハウスドルフ空間 Ω が存在して，A は $C(\Omega)$ と同型になる．$a \mapsto \hat{a}$ と書く．

- C*-環 が単位元を持たないときでも，ある局所コンパクトハウスドルフ空間 Ω が存在して，A は $C_0(\Omega)$ と同型になる．ただし，$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) | \forall \epsilon > 0, \{\omega \in \Omega | |f(\omega)| \geq 0\}$ がコンパクト $\}$ である．

定義 1.4. $\cdot$ $a \in A$ に対し，
$\sigma(a) := \sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda 1 - a :$ 可逆でない $\}$
と定め，これを $a \in A$ のスペクトルという．

- 固有値の一般化である．

- 一般にスペクトルと固有値 (i.e. $\ker(\lambda 1 - a) \neq 0$) は一致しない．

- $\hat{a}(\Omega) = \sigma(a)$.

- p が射影 $\Leftrightarrow \sigma(p) \subseteq \{0, 1\}$.

- p が射影のとき，$\hat{p}$ は定義関数である．

例 1. $(C_b(\Omega))$
Ω : コンパクトハウスドルフ空間.
$C_b(\Omega) := \{f \in C(\Omega) |$ 有界 $\}$，$||f||_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$
和，積:*pointwise*，可換，単位元を持つ，C*-環.
$\sigma(f) = \mathrm{Im}(f)$.

例 2. $M_n(\mathbb{C})$
作用素ノルムに関して C*-環.

2 K_0- 群

定義 2.1. A を C*-環 とする．
$P[A] := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{p \in M_n(A) |$ 射影 $\}$.

- $p \in M_n(A)$ が射影とは p が $p = p^* = p^2$ を満たすことである．

定義 2.2. $p, q \in P[A]$ に対して，

- $p \sim q \Leftrightarrow$ ある A 成分行列 u が存在して，$p = u^*u$，$q = uu^*$，

- $p \approx q \Leftrightarrow$ ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，$1_n \oplus p \sim 1_n \oplus q$，

と定めると，どちらも同値関係を定める． $K_0(A)^+ := P[A]/\approx$ と定めると，$[p]+[q] := [p\oplus q]$ により，半群 *(i.e. 2* 項演算，結合律*)* になる．

$p,\, q,\, r,\, p',\, q' \in P[A]$ のとき，次が成り立つ，

- $p \sim p',\ q \sim q' \Rightarrow p\oplus q \sim p' \oplus q'$.
- $p\oplus q \sim q \oplus p$.
- $pq = 0 \Rightarrow p+q \sim p\oplus q$.
- $||p-q|| < 1 \quad \Rightarrow \quad p\sim q$.
- (消約性)$[p]+[q] = [p]+[r] \Rightarrow [q]=[r]$ ($\because\ [1_n - p]\oplus[p] = [1_n]$).

$\mathbb{N}_0$ から $\mathbb{Z}$ を構成するのと同じ方法で $K_0(A)^+$ から $K_0(A)$ を構成する．

N を消約的可換半群とする．$(x,\, z),\, (y,\, t) \in N\times N$ に対し，$(x,\, z)\sim(y,\, t) \Leftrightarrow x+t = y+z$ により同値関係を定める．この同値類全体を $G(N)$ と書き，グロタンディーク群という．

- $x\mapsto [x,\, 0]$ により，N を $G(N)$ の部分群とみなす．
- $G(N) = \{x-y | x,\, y\in N\}$.
- N から可換群 G への準同型は $G(N)$ から G への準同型に一意に拡張される．

定義 2.3.
- $K_0(A)^+$ のグロタンディーク群を $K_0(A)$ と定める．
- C*-環 $A,\ B$ 間の準同型 φ に対して，$\varphi_* : K_0(A) \to K_0(B)$ を $\varphi_*[p] = [\varphi(p)] (p\in P[A])$ を満たすものとして定める．

$\varphi : A\to B,\ \psi : B\to C$ を C*-環 間の単位元を保つ準同型とする．

- φ_* は一意で well-defined である．
- $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*,\ (\mathrm{id}_A)_* = \mathrm{id}_{K_0(A)}$.
- $K_0(A)\oplus K_0(B) \cong K_0(A\oplus B)$.

例 3. $A = \mathbb{C}$ のとき，$(K_0(A)^+,\, K_0(A)) = (\mathbb{N}_0,\, \mathbb{Z})$ となる．
$p\approx q \Leftrightarrow rank(p) = rank(q)$ を用いる (ヒント : $\mathrm{Tr}(uu^*) = \mathrm{Tr}(u^*u)$).

例 4. H を可分無限次元 *Hilbert* 空間とする．$A = B(H)$ とする．$(K_0(A)^+,\, K_0(A)) = (\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},\, 0)$ となる．
$p\approx q \Leftrightarrow rank(p) = rank(q)$ が無限次元でも成り立つことを用いる (実は一般の濃度について成り立つ).

3 AF 環の分類

定義 3.1. C*-環 A が，A の単位元を持つ A の有限次元部分 C*-環 の増大列 $\{A_n\}$ で $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ が A 内で稠密なものを持つとき AF 環という．

結局包含写像になるため，有限次元部分 C*-環 の帰納極限として定義してもよい．

例 5. $M_n(\mathbb{C})$.

例 6. 可分 *Hilbert* 空間 H 上のコンパクト作用素全体のなす空間 $K(H)$.
$\{e_n\}$ を H 正規直交基底とし，$p_n \in B(H)$ を $span\{e_1, \dots, e_n\}$ への射影とするとき，$\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n B(H) p_n$ は $K(H)$ 内で稠密.

A, B を AF 環とする.

- $\varphi_k : A_k \to A_{k+1}$, $\varphi^k : A_k \to A$ を包含写像とする．準同型 $\psi_k : A_k \to B$ が $\psi_k = \psi_{k+1} \circ \varphi_k$ を満たすとすると，次の図式を可換にする準同型 $\psi : A \to B$ が一意に存在する.

$$\begin{tikzcd} & A_k \arrow[dl, "\varphi^k"'] \arrow[dr, "\psi_k"] & \\ A \arrow[rr, "\psi"] & & B \end{tikzcd}$$

- (stably finite)$n \in \mathbb{N}$, $u \in M_n(A)$, $u^*u = 1 \Rightarrow uu^* = 1$.

定義 3.2. $(G, \leq)$ が次の (1) $\sim$ (3) を満たすとき，半順序群という.
(1)G は可換群，$\leq$ は G 上の半順序.
(2)$G^+ = \{x \in G | x \geq 0\}$ とすると，$G = G^+ - G^+$.
(3)$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

半順序は反射律 $(x \geq x)$，推移律 $(x \geq y, y \geq z \Rightarrow x \geq z)$，反対称律 $(x \geq y, y \geq x \Rightarrow x = y)$ を満たすものである.

次の定理から，$[p], [q] \in K_0(A)$ に対して，$[p] \leq [q] \Leftrightarrow [q] - [p] \in K_0(A)^+$ と定めると，これは $K_0(A)$ 上の半順序を定めることが分かる．つまり，反対称律が非自明.

定理 3.3. A を AF 環とすると，$K_0(A)^+ \cap (-K_0(A)^+) = 0$.

($[p] = -[q]$, $p \oplus q \oplus 1_n \sim 1_n$ に対して，stably finite を使う.)

定義 3.4. φ を半順序群 G_1, G_2 の間の準同型とする.

- $\varphi({G_1}^+) \subseteq {G_2}^+$ であるとき，φ を正値という.
- φ が全単射かつ φ^{-1} も正値であるとき，φ を順序同型写像といい，G_1, G_2 を順序同型という.

補題 3.5. A を C*-環 とし，$p_1, \dots, p_k, q \in P[A]$ が $q \sim p_1 \oplus \cdots \oplus p_k$ を満たすとする．このとき，射影 $q_1, \dots, q_k \in A$ で互いに直交して，$q_i \sim p_i$, $q = q_1 + \cdots, +q_k$ であるものが存在する.

Proof. A 成分行列 w で $w^*w = q$, $ww^* = p_1 \oplus \cdots \oplus p_k$ となるものが存在する.

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

とかく．すると，$w^*w = \sum_{i=1}^{n} {w_i}^* w_i$,

$$ww^* = \begin{bmatrix} w_1{w_1}^* & \cdots & w_1{w_n}^* \\ \vdots & & \vdots \\ w_n{w_1}^* & \cdots & w_n{w_n}^* \end{bmatrix}$$

となる．よって，$p_i = w_i{w_i}^*$, $w_i{w_j}^* = 0\,(i \neq j)$ となる.

$q_i = {w_i}^* w_i$ とおくと，w_i が部分等長なことから q_i は射影になる．$q_i q_j = {w_i}^*(w_i{w_j}^*)w_j = 0\,(i \neq j)$, $q_i \sim p_i$, $q = q_1 + \cdots, +q_k$ より，q_i は求めるものである. □

定義 3.6. $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ に対し，$e^l_{i\,j}, e^l \in A$ をそれぞれ $M_{n_k}(\mathbb{C})$ の標準基底，単位元に対応するものとする．

定理 3.7. $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ とすると，

$$\tau : \mathbb{Z}^k \to K_0(A),\, (m_1, \ldots, m_k) \mapsto \sum_{l=1}^{k} m_l [e^l_{1\,1}]$$

は順序同型である．

Proof. $K_0(A) \oplus K_0(B) \cong K_0(A \oplus B)$ と例 3 より，成立する． □

系 3.7.1. A を 0 でない有限次元 C*-環 とすると，ある $x_1, \ldots, x_k \in K_0(A)$ が存在して，$K_0(A)^+ = \mathbb{N}_0 x_1 + \cdots + \mathbb{N}_0 x_k$ となる．

次の定理は初めの主張の証明の核になる定理であり，図 1 を図 2 に移すときに使う．

定理 3.8. $A,\ B$ を 0 でない有限次元 C*-環 とする．
(1)$\tau : K_0(A) \to K_0(B)$ を $\tau([1_A]) = [1_B]$ を満たす正値準同型とすると，ある単位元を保つ準同型 $\varphi : A \to B$ が存在して，$\varphi_* = \tau$ となる．
(2)$\varphi, \psi : A \to B$ を単位元を保つ準同型とする．このとき，$\varphi_* = \psi_* \Leftrightarrow$ あるユニタリ $u \in B$ が存在して，$\psi = (\mathrm{Ad}\, u)\varphi$ となる．ただし，$(\mathrm{Ad}\, u)(a) = uau^*$ である．

Proof. (1) ($p \approx q \Leftrightarrow rank(p) = rank(q)$ であるので，$e^l_{i\,j}$ の行き先を考えればよい.)
τ は正値なので，$\exists p_l \in P[B], \tau([e_l]) = [p_l]$.

$$[p_1 \oplus \cdots \oplus p_k] = \tau(\sum_{l=1}^{k}[e_l]) = \tau(1_A) = 1_B.$$

よって，補題 3.5 より，$\exists q_1, \ldots, q_k \in B$, 互いに直交, $q_i \sim p_i$, $q = q_1 + \cdots, +q_k$.
　$\exists p^l_{11} \in P[B], \tau([e^l_{11}]) = [p^l_{11}]$. よって，

$$n_l[p^l_{11}] = \tau(n_l[e^l_{11}]) = \tau([e_l]) = [p_l].$$

よって，補題 3.5 より，$\exists q^l_{11}, \ldots, q^l_{n_l n_l} \in B$, 互いに直交, $q^l_{jj} \sim p^l_{11}$, $q = q^l_{11} + \cdots, +q^l_{n_l n_l}$.
　$q^l_{jj} \sim q^l_{11}$ より，$\exists u^l_j \in B\, s.t.\, q^l_{jj} = u^l_j (u^l_j)^*, q^l_{11} = (u^l_j)^* u^l_j$. $q^l_{ij} = u^l_i (u^l_j)^*$ とすると，$(q^l_{ij})^* = q^l_{ji}$, $q^l_{ij} q^l_{jm} = \delta_{in} q^l_{ij}$ (u が部分等長を使う). 線形写像 $\varphi : A \to B$ で $\varphi(e^l_{ij}) = q^l_{ij}$ を満たすものが存在し，単位元を保つ準同型である．$K_0(A)$ は $[e^1_{11}], \ldots, [e^k_{11}]$ を生成し，$\varphi_*([e^l_{11}]) = [q^l_{11}] = \tau([e^l_{11}])$ なので，$\varphi_* = \tau$.
　(2) $\Leftarrow$)$(\mathrm{Ad})_* = \mathrm{id}$ より成り立つ．

　$\Rightarrow$)$p^l_{ij} = \varphi(e^l_{ij})$, $q^l_{ij} = \psi(e^l_{ij})$ とおく，$p^l_{ij} \sim q^l_{ij}$ より，$\exists u_l \in B\, s.t.\, p^l_{ij} = {u_l}^* u_l, q^l_{ij} = u_l {u_l}^*$.

$$u = \sum_{l=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_l} q^l_{i1} u_l p^l_{1i}$$

とおくと，これはユニタリで $u \in B$ で $up^l_{ij} = q^l_{ij} u$ ある．$\psi(e^l_{ij}) = (\mathrm{Ad}\, u)\varphi(e^l_{ij})$ なので，$\psi = (\mathrm{Ad}\, u)\varphi$ となる． □

補題 3.9. $p.q$ を C*-環 A の射影とする．$u \in A$ で $||p - u^*u||, ||q - uu^*|| < 1$ で $u = qup$ となるものがあれば，$p \sim q$ である．

Proof. C*-環 pAp の単位元は p なので，u^*u は pAp 内で可逆．同様にして，uu^* は qAq 内で可逆．$z = |u|^{-1} \in pAp$ とし，$w = uz$ とおく ($|u| = \sqrt{u^*u}$, 定理 1.3 を使う). $w^*w = zu^*uz = z|u|^2 z = p$. $uu^*ww^* = uu^*uzzu^* = uu^*$ となるので，$ww^* = q$. □

次の補題は図 1 を可換になるように取るときに必要になる.

補題 3.10. A を AF 環とする．このとき，次が成り立つ.
(1)$p \in P[A]$ ならば，ある $k \in \mathbb{N}$, $q \in P[A_k]$ が存在して，$[p]_A = [q]_A$ となる.
(2)$k \in \mathbb{N}$, p, $q \in P[A_k]$, $[p]_A = [q]_A$ とすると，ある $m > k$ が存在して，$[p]_{A_m} = [q]_{A_m}$ となる.

Proof. p, $q \in M_n(A)$, $||p - q|| < 1 \Rightarrow p \sim q$ と $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = A$, 補題 3.9 からわかる. □

補題 3.11. A, B, C を AF 環，A は有限次元とする．$\tau : K_0(A) \to K_0(C)$，$\rho : K_0(B) \to K_0(C)$ を正値準同型で $\tau(K_0(A)^+) \subseteq K_0(B)$ とすると，正値準同型 $\tau' : K_0(A) \to K_0(B)$ で $\rho\tau' = \tau$ を満たすものが存在する.

この補題から，$\varphi^n : A_n \to A$ を包含写像とするとき，$K_0(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_*^n(K_0(A_n))$ となることが分かる.

定理 3.12 (Elliot)**.** A，B を AF 環，τ を $K_0(A)$ から $K_0(B)$ への順序同型で $\tau([1_A]) = [1_B]$ とする．このとき，A から B への同型 φ が存在して，$\varphi_* = \tau$.

Proof. $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = A$，$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} = B$ とし，$\varphi^n : A_n \to A$，$\psi^n : B_n \to B$ を包含写像とする．$\rho = \tau^{-1}$ とする.

補題 3.10 から，$K_0(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_*^n(K_0(A_n))$，$K_0(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi_*^n(K_0(B_n))$

$n_1 = 1$ とおく．系 3.7.1 より，ある $x_1, \ldots, x_k$ が存在して，$K_0(A_{n_1})^+ = \mathbb{N}_0 x_1, \ldots, \mathbb{N}_0 x_k$ となる．従って，$\tau\varphi_*^n(K_0(A_{n_1})^+) = \tau\varphi_*^n(x_1), \ldots, \tau\varphi_*^{n_1}(x_k)$ となる．$K_0(B)^+$ は単調増大列 $\{\psi_*^n(K_0(B_m)^+)\}$ の和集合で表されるので，ある $m > n_1$ が存在して，$\tau\varphi_*^n(K_0(A_{n_1})^+) \subseteq \psi_*^n(K_0(B_m)^+)$ とできる．よって，補題 3.11 ある正値準同型 $\tilde{\tau} : K_0(A_{n_1}) \to K_0(B_m)$ で次を可換にするものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} K_0(A_{n_1}) & \xrightarrow{\varphi_*^{n_1}} & K_0(A) \\ {\scriptstyle\tilde{\tau}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\tau}\big\downarrow \\ K_0(B_m) & \xrightarrow{\psi_*^{m}} & K_0(B) \end{array}$$

$\tilde{\tau}[1_A] = [e]_{B_m}$ とすると，$[e]_B = \psi_*^m[e]_{B_m} = \tau\varphi_*^{n_1}[1_A] = [1_B]_B$ となる．従って，補題 3.10 (2) より，ある $m_1 > m$ が存在して，$[e]_{B_{m_1}} = [1_B]_{B_{m_1}}$ とできる．$\tilde{\psi} : B_m \to B_{m_1}$ を包含写像とし，$\tau^1 = \tilde{\psi}_*\tilde{\tau}$ とおく．τ^1 は単位元を保つ正値準同型になり，次の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc} K_0(A_{n_1}) & \xrightarrow{\varphi_*^{n_1}} & K_0(A) \\ {\scriptstyle\tau^1}\big\downarrow & & {\scriptstyle\tau}\big\downarrow \\ K_0(B_{m_1}) & \xrightarrow{\psi_*^{m_1}} & K_0(B). \end{array}$$

$\rho\psi_*^{m_1}$ に同様の議論を適用することにより，ある $n > m_1$ と正値準同型 $\tilde{\rho} : K_0(B_{m_1}) \to K_0(A_n)$ で次の図式を可換にするものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} K_0(B_{m_1}) & \xrightarrow{\psi_*^{m_1}} & K_0(B) \\ {\scriptstyle\tilde{\rho}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\rho}\big\downarrow \\ K_0(A_n) & \xrightarrow{\psi_*^{m_1}} & K_0(A). \end{array}$$

ある $p_1, \ldots p_k \in P[A_{n_1}], q_1, \ldots q_k \in P[A_n]$ が存在して，$x_j = [p_j]_{A_{n_1}}, \tilde{\rho}\tau^1(x_j) = [q_j]_{A_n}$ となる．$\varphi_*^n r\tilde{h}otau^1 = \rho\psi_*^{m_1}\tau^1 = \rho\tau\varphi_*^{n_1} = \varphi_*^{n_1}$ より，$[p_j]_A = [q_j]_A$ となる．従って，補題 3.10 (2) より，ある $n_2 > n$ が存在して，$P[A_{n_2}]$ が $p_1, \ldots p_k$ 及び $q_1, \ldots q_k$ を含み，$[p_j]_{A_{n_2}} = [q_j]_{A_{n_2}}$ となる．$\tilde{\varphi} : A_n \to A_{n_2}$ を

包含写像とし，$\rho^1 = \tilde{\varphi}_* \tilde{\tau}$ とおく．すると，次の図式は可換になる．

$$\begin{CD}
K_0(B_{m_1}) @>{\psi_*^{m_1}}>> K_0(B) \\
@V{\rho^1}VV @V{\rho}VV \\
K_0(A_{n_2}) @>{\varphi_*^{n_2}}>> K_0(A).
\end{CD}$$

$\varphi_1 : A_{n_1} \to A_{n_2}$ を包含写像とすると，各 j に対して，$\rho^1\tau^1(x_j) = \tilde{\varphi}_*\tilde{\tau}\tau^1(x_j) = \tilde{\varphi}_*[q_j]_{A_n} = [q_j]_{A_{n_2}} = [p_j]_{A_{n_2}} = \varphi_{1*}[p_j]_{A_{n_1}} = \varphi_{1*}(x_j)$ となるので，$\rho^1\tau^1 = \varphi_{1*}$ となる．

同様にして帰納的に $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ と正値準同型 $\tau^k : K_0(A_{n_k}) \to K_0(B_{m_k})$, $\rho^k : K_0(B_{m_k}) \to K_0(A_{n_k})$ で次の 2 つの図式

$$\begin{CD}
K_0(A_{n_k}) @>{\varphi_*^{n_k}}>> K_0(A) \\
@V{\tau^k}VV @V{\tau}VV \\
K_0(B_{m_k}) @>{\psi_*^{m_k}}>> K_0(B),
\end{CD}$$

$$\begin{CD}
K_0(B_{m_k}) @>{\psi_*^{m_k}}>> K_0(B) \\
@V{\rho^k}VV @V{\rho}VV \\
K_0(A_{n_{k+1}}) @>{\varphi_*^{n_{k+1}}}>> K_0(A)
\end{CD}$$

を可換にし，$\rho^k\tau^k = \varphi_{k*}$, $\tau^{k+1}\rho^k = \psi_{k*}$ となるものが存在する．ただし，$\varphi_k : A_{n_k} \to A_{n_{k+1}}$, $\psi_k : B_{m_k} \to B_{m_{k+1}}$ を包含写像とする．τ^1 が単位元を保つことと $\rho^k\tau^k = \varphi_{k*}$, $\tau^{k+1}\rho^k = \psi_{k*}$ より，帰納的に τ^k, ρ^k が単位元を保つことが分かる．
(こんな感じになる.)

$$\begin{tikzcd}
K_0(A_{n_1}) \arrow[rr, "\varphi_{1*}"] \arrow[dr, "\tau^1"'] & & K_0(A_{n_2}) \arrow[rr, "\varphi_{2*}"] \arrow[dr, "\tau^2"'] & & K_0(A_{n_3}) \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d, shift left, "\tau"] \\
& K_0(B_{m_1}) \arrow[rr, "\psi_{1*}"] \arrow[ur, "\rho^1"] & & K_0(B_{m_2}) \arrow[rr, "\psi_{2*}"] \arrow[ur, "\rho^2"] & & \ldots \arrow[r] & K_0(B) \arrow[u, shift left, "\rho"]
\end{tikzcd}$$

図 1: 長い可換図式

定理 3.8 より，ある単位元を保つ準同型 $\alpha^1 : A_{n_1} \to B_{m_1}$，$\beta^1 : B_{m_1} \to A_{n_2}$ が存在して，$\alpha^1_* = \tau^1$，$\beta^1_* = \rho^1$ となる．$(\beta^1\alpha^1)_* = \rho^1\tau^1 = \varphi_{1*}$ となるので，あるユニタリな A_{n_2} の元 u が存在して，$(\mathrm{Ad}u)\beta^1\alpha^1 = \varphi^1$ となる．$(\mathrm{Ad}u)_* = \mathrm{id}$ なので，必要なら β^1 を $(\mathrm{Ad}u)\beta^1$ にすることで，$\beta^1\alpha^1 = \varphi_1$ としてよい．同様にして，単位元を保つ準同型 $\alpha^k : A_{n_k} \to B_{m_k}$，$\beta^k : B_{m_k} \to A_{n_{k+1}}$ で $\alpha^k_* = \tau^k$，$\beta^k_* = \rho^k$，$\beta^k\alpha^k = \varphi_k$，$\alpha^{k+1}\beta^k = \psi^k$ となるものがとれる．

$a \in A_{n_k}$ に対して，$\alpha^k(a) = \alpha^{k+1}(a)$ である．これは $\alpha^k(a) = \psi_k\alpha^k(a) = \alpha^{k+1}\beta^k\alpha^k(a) = \alpha^{k+1}\varphi_k(a) = \alpha^{k+1}(a)$ から従う．

$A' = \bigcup_k A_{n_k}$ とする．$\varphi : A' \to B$ を $a \in A_{n_k}$ に対し，$\varphi(a) = \alpha^k(a)$ により定めるとこれは well-defined になる．各 α^k は norm-deceasing な準同型なので，φ も norm-deceasing な準同型になる．A' は A で稠密なので A 上に一意に拡張できて，これを φ と置き直す. 同様にして，準同型 $\psi : B \to A$ で $b \in B_{m_k}$ に対し $\psi(b) = \beta^k(b)$ となるものがとれる．

$a \in A_{n_k}$ に対し，$\psi\varphi(a) = \beta^k\alpha^k(a) = \varphi_k(a) = a$ となるので，$\psi\varphi = id$ となる．同様にして，$\varphi\psi = id$ となる．よって，φ は同型写像である．

$$
\begin{tikzcd}
A_{n_1} \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\alpha^1"'] & & A_{n_2} \arrow[rr, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\alpha^2"'] & & A_{n_3} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & A \arrow[d, shift left, "\varphi"] \\
& B_{m_1} \arrow[ur, "\beta^1"] \arrow[rr, "\psi_1"] & & B_{m_2} \arrow[ur, "\beta^2"] \arrow[rr, "\psi_2"] & & \dots \arrow[r] & B \arrow[u, shift left, "\psi"]
\end{tikzcd}
$$

図 2: 長い可換図式

$p \in P[A_{n_k}]$ をとる．$\tau([p]_A) = \tau\varphi_*^{n_k}([p]_{A_{n_k}}) = \psi_*^{m_k}\alpha_*^k([p]_{A_{n_k}}) = \psi_*^{m_k}([\alpha^k p]_{B_{m_k}}) = [\varphi(p)]_B = \varphi_*([p]_A)$ となる．よって，$\varphi_*^{n_k}(K_0(A_{n_k})^+)$ 上 $\tau = phi_*$ となる．よって，$K_0(A)^+ \bigcup_k \varphi_*^{n_k}(K_0(A_{n_k})^+)$ 上一致するので，$K_0(A)$ 上 $\tau = \varphi_*$ である．

$\square$

系 3.12.1. 2 つの単位元を持つ AF 環が同型であることと，$K_0(A)$ と $K_0(B)$ が単位元を保つ順序同型であることが同値である．

例 7. 写像 $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 全体の集合を $\mathbf{S}$ とおく．$s! \in \mathbf{S}$ を $s!(n) = s(n) \cdots s(1)$ で定める．$\varphi_n : M_{s!(n)}(\mathbb{C}) \to M_{s!(n+1)}(\mathbb{C})$ を $a \mapsto a \oplus \cdots \oplus a$ で定める．M_s により $(M_{s!(n)}(\mathbb{C}), \varphi_n)$ の帰納極限を表す．

$p_1, p_2, \dots$ を正の素数全体の集合とする． $s(j) = \prod_{j=1}^{\infty} p_j{}^{n_{j,i}}$ $(n_{j,i} \in \mathbb{N}_0)$ とかける． $\mathbf{n} = n_j{}_{j=1}^{\infty}$ を $n_j = \sup_j\{n_{j,i}\}$ で定める．

$$
Q(\mathbf{n}) = \left\{ \frac{n}{m} \middle| n \in \mathbb{Z},\, m = \prod_{j=1}^{\infty} p_j{}^{m_j} \ (m_j \in \mathbb{N}_0,\, m_j \le n_j,\, m_j \text{は有限個を除いて } 0) \right\}
$$

と定める．このとき，$K_0(M_s) = Q(\mathbf{n})$ である．例えば，$s \equiv 2$ なら $K_0(M_s) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$

参考文献

[1] Grard J. Murpfy, “C^*-algebras and operator theory,” Boston, Academic Press Inc.,1990.

[2] M. R∅(の小文字)rdm, F. Larsen and N. J. Laustsen, “An introduction to K-theory for C^*-algebras,” New York, Cambridge University Press, 2000.

[3] 生西明夫, 中神祥臣, “作用素環入門 I · II,” 岩波書店.