松島多様体誤植表 (第 37 版 3 刷) [1]

compiled on 2017 年 8 月 5 日

誤植表を作った感想：松島多様体は読まない方がいいです。Warner を読みましょう (※個人の感想です)。なんだかんだ、松島多様体は良い本だとは思います。

誤植表の後ろに、付録（A.1 英語版松島の引用、A.2 Sard の定理の証明）を載せてあります。

松島多様体正誤表 wiki(`https://www63.atwiki.jp/yozougosyoku/pages/17.html`) は、大いに参考にさせていただきました。[2]

1　序論

(*1) この本では、単に近傍といえば開近傍のことを指す。

(*2) n 次元ユークリッド空間には、通常の距離ではなく、各成分の最大値をとる ∞-ノルムが入ってあることに注意（距離空間としては同値であるが）。逆関数定理の証明などに出てくる距離はこの距離なので、証明を追う際戸惑うかもしれない。

§4．逆関数の定理

p	位置	誤	正
17	6 行目	$\lvert(d\phi)_p(v)-(d\phi)_p(v)\rvert<\varepsilon\lvert v\rvert$	$\lvert(d\phi)_p(v)-(d\phi)_p(v)\rvert\le\varepsilon\lvert v\rvert$ (*1)
19	14 行目	$Q(0:r)$	$Q(0;r)$
19	25 行目	$\lvert p_k\rvert\le\sum_{l=0}^{k-1}(1/2)^l\lvert s\rvert<2\lvert s\rvert$	$\lvert p_k\rvert\le\sum_{l=0}^{k-1}(1/2)^l\lvert s\rvert\le 2\lvert s\rvert$ (*1)

(*1) $v=0$ のときや $s=0$ のとき、等号が成立

2　可微分多様体

§1．多様体の定義

p	位置	誤	正
27	3 行目	$S=\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in U}$	$S=\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$

§2．可微分多様体の例

p	位置	誤	正
29	8 行目	$\mathbb{R}^n$ の球面 S^{n-1} の内部 B^n	$\mathbb{R}^n$ の球面 S^{n-1} の内側 B^n (*1)
29	9 行目	$p\to(x^1)^2+\cdots+(x^{i-1})^2+(x^{i+1})^2+\cdots+(x^{n+1})^2$	$p\to(x^1,\ldots,x^{i-1},x^{i+1},\ldots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^n$
29	17,18 行目	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^{n+1}$
30	11 行目	$\frac{{x_a}^{i-1}}{{x_a}^{b-1}(p)}$	$\frac{{x_a}^{i-1}(p)}{{x_a}^{b-1}(p)}$

[1] 松島与三『多様体入門（数学選書５.）』（裳華房）、2011/5/20 発行第 37 版 3 刷

[2] ここにない誤植などに気づいたら、 paper.math.28system at gmail.com にメール、または Twitter(@paper3510mm) までご連絡ください。検討した後更新します。この pdf は `http://s2s.undefin.net/wiki/?2016%2F%E8%87%AA%E4%B8%BB%E3%82%BC%E3%83%9F%2F%E6%9D%BE%E5%B3%B6%E5%A4%9A%E6%A7%98%E4%BD%93` で公開しています。

(*1) S^{n-1} の位相の意味での内部（内点の集合）は空である。言葉遣いの問題で誤植とは言えないかもしれないが一応。

§3．可微分関数と局所座標系

p	位置	誤	正
31	20 行目	関数 $(f^0\psi_\alpha^{-1})(u)$	関数 $(f\circ\psi_\alpha^{-1})(u)$
34	1 行目	M の座標近傍で $f^1,\ldots,f^n$ は…	M の座標近傍で $(f^1,\ldots,f^n)$ は…
35	9 行目	C^s 級座標近傍系である場合	C^s 級座標近傍である場合

§4．可微分写像

p	位置	誤	正
35	27 行目	座標近傍 (U,ψ) および (V,φ) をば	座標近傍 (U,ψ) および (V,η) をば (*1)
36	12 行目	…§ 5 で証明する	…§ 7 で証明する

(*1) η でなくても適当な文字でよい。少なくとも φ は、節のはじめで M から M' への連続写像としている（該当箇所の後でもこの意味で使っている）ので不適切。

§5．接ベクトルと接ベクトル空間、リーマン計量

p	位置	誤	正
39	21 行目、式 (2) の上の式	$\left(\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}^i}\right)_p=\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$	$\left(\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}^i}\right)_p=\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$

§6．関数の微分と臨界点

p	位置	誤	正
45	11 行目	$(\xi^1)^2+\cdots+(\xi^r)^2-(\xi^{p+1})^2-\cdots-(\xi^{r+n})^2$	$(\xi^1)^2+\cdots+(\xi^r)^2-(\xi^{r+1})^2-\cdots-(\xi^{r+n})^2$
46	23 行目	(*1)	(*1)
48	11 行目	$x_i=\displaystyle\sum_k t^i{}_k y^k$ となる	$x^i=\displaystyle\sum_k t^i{}_k y^k$ となる
48	16 行目	$D(y^1,\ldots,y^n)/D(x^1,\ldots,x^n)_p=T^{-1}(p)$	$D(y^1,\ldots,y^n)/D(x^1,\ldots,x^n)_p=\mathrm{det}T^{-1}(p)$
48	17 行目	局所近傍系である	局所座標系である (*2)

(*1) 「$A'(0)=(a_{ji}(0))_{2\le i,j\le n}$ の行列式は 0 でないとしても一般性を失わない」とあるが、一般性を失う。$A=(a_{ij}(u))$ で $\det A(u)\neq 0$ より、特に $\det(a_{ij}(0))_{i,j=1,\ldots,n}\neq 0$。しかし、$A'(0)=(a_{ij}(0))_{i,j=2,\ldots,n}$ とするとき $\det A'(0)\neq 0$ とは限らない（$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ を考えると、$A'(0)=(0)$ より $\det A'(0)=0$ となる）。修正するには、次のように考えればよい。すなわち、補題 1 の仮定から A は対称行列なので、適当な実直交行列 S と対角行列 B によって $B={}^tSAS$ と対角化できる。$\det A\neq 0$ より $\det B\neq 0$ もわかる。この B について、$B'=(b_{ij})_{i,j=2,\ldots,n}$ も対角行列で $\det B'(0)\neq 0$ となる。以後このように A を対角化して考えればよい。

(*2) 局所座標系と座標近傍系ならあるが、局所近傍系はない。

§7．写像の微分

p	位置	誤	正
49	27 行目	$(\varphi_*)_p : T_p(M) \to T_{\varphi(p)}(M)$	$(\varphi_*)_p : T_p(M) \to T_{\varphi(p)}(M')$
50	2 行目	$T_{\varphi(p)}(M)$ の部分空間⋯	$T_{\varphi(p)}(M')$ の部分空間⋯

§8． Sard の定理

p	位置	誤	正
51	27 行目	原点を中心とする幅 r の立方体を $Q(r)$	(*1)
51	補題 1 の証明以降	(*2)	(*2)

(*1) この本では「原点を中心とする幅 r の立方体」が何のことか明記されていないが、19 ページ 2 行目に「0 を中心とする巾 r の閉立方体 $\bar{Q}(0;r) = \{x \mid |x^i| \leq r, i = 1,\ldots,n\}$ 」という記述があることから、一辺 $2r$ の開立方体 $Q(r) = \{x \mid |x^i| < r, i = 1,\ldots,n\}$ のことと解釈する。

(*2) ~~A の分割の取り方から間違っている~~ (改めて考えてこの点は別に間違っていない気がしてきた (未検証))。~~補題 1 の証明は誤りであり~~、この分割の取り方を Sard の定理でも用いているので、ここでは補題 1 以降を破棄し、この本に代わり Sard の定理を証明する（ A.2 を参照)。

§9．リーマン多様体の運動

p	位置	誤	正
54	21 行目	$\|\varphi_* u\| = \|u\|$	(*1)
54	26 行目	$g_{\varphi(p)}(\varphi_* u, \varphi_* v) = g_p(u,v)$	$g'_{\varphi(p)}(\varphi_* u, \varphi_* v) = g_p(u,v)$
56	2 行目	$\theta \in I(M)$	$\theta \in I(H)$
56	9 行目	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = h^2,\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = h^2$	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = h^2,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = h^2$
56	11 行目	$\left(h^{-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, h^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$	$\left(h^{-1}\frac{\partial u}{\partial x}, h^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

(*1) 左辺と右辺で、同じ接ベクトルの長さの記号 $\|\|$ を用いているが、左辺は M' のリーマン計量 g' によって定まる長さであり、右辺は M のリーマン計量 g によって定まる長さであることに注意。

§１０．多様体の挿入とうめ込み、部分多様体

p	位置	誤	正
57	22,23 行目	M' の位相は M の部分空間の位相⋯	M の位相は M' の部分空間の位相⋯
57	26 行目	正規部分多様体	(*1)
58	24 行目	⋯)．N から M への⋯	⋯)．$p \in N$ を任意にとっておく．N から M への⋯
58	30 行目	§5 定理 1 により	§7 定理により
59	28 行目	§5，定理 1 により	§7 定理により
60	15 行目	一独次立	一次独立
60	19 行目	$\{q \in V' \mid y^{n+i}(q) = 0,\ i = 1, \ldots, m-n\}$	$\{q \in V'_a \mid y^{n+i}(q) = 0,\ i = 1, \ldots, m-n\}$
62	2,3 行目	(*2)	(*2)
62	3 行目	$g \notin V_p$	$q \notin V_p$
62	16 行目	より ${f_\alpha}^0(q) = 1$，⋯	より ${f_\alpha}^0(p) = 1$，⋯
62	22 行目	M の閉部分多様体	$\mathbb{A}^N$ の閉部分多様体
63	補題 2 の証明	(*3)	(*3)
64	3 行目	$\displaystyle\sum_{i,j=i}^{m} \frac{\partial a^i}{\partial x^a} \frac{\partial a^j}{\partial x^b} g_{ij}$	(*4)

(*1) 正則部分多様体のほうが一般的。regular の訳としては普通、「正則」が当てられる。

(*2) $f_p : C^\infty$ 級とあるが、V_p の境界 ∂V_p 上で微分可能かどうかわからない。よって、あらかじめ局所座標系として $(U; x^1, \ldots, x^n)$ を取っておき、a を $\bar{V}_p \subset U$ となるよう十分小さくとって

$$f_p(q) = \begin{cases} g(x^1(q)) \ldots g(x^n(q)) & q \in U \\ 0 & q \notin V_p \end{cases}$$

とする。このとき、$|x^i(q)| \geq a\ (q \notin V_p)$ より $g(x^i(q)) = 0\ (i = 1, \ldots, n)$。よって、$U - V_p$ 上で $f_p(q) = 0$ となっており f_p は well-defined である。また f_p が C^∞ 級であることは

$$\begin{cases} U \text{ の内部では } g \text{ が } C^\infty \text{ 級なのでよい} \\ {V_p}^c \text{ の内部では明らか} \\ \partial U \subset {V_p}^c \text{ より } \partial U \text{ 上では } q \notin V_p \text{ での定義よりよい} \end{cases}$$

と確かめられる。

(*3) ここも (*2) と同様。W を $V \subset W,\ \bar{W} \subset U$ となるようにし、

$$g(q) = \begin{cases} f(q)h(q) & q \in U \\ 0 & q \notin W^c \end{cases}$$

とするとよい。well-defined 性も同じ。

(*4) 局所座標系の変数の a^i、a^j と上付き添え字としての a で、文字 a が被っているのに注意。

§１１．ベクトル場と微分作用素

p	位置	誤	正
66	15 行目	$(a+b)x = ax + by$	$(a+b)x = ax + bx$
66	30 行目	§８，補題により	§１０，補題２により
67	21,22 行目	$(x^1, \ldots, x^n)$ を V における局所座標系，$p \in V$ とする	(*1)
68	27 行目	$\cdots\,)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$	$\cdots\,)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p)$
70	10,19 行目	X' は X によりただ一とおりにきまる	(*2)

(*1) 考える順番がおかしい。「p を M の任意の点とし，$(x^1, \ldots, x^n)$ を p のまわりの局所座標系とする」と考える。

(*2) きまらない。X' は M' 上のベクトル場として、(7) 式 $(\varphi_*)_p X_p = X'_{\varphi(p)}$ によってきまると書かれているが、φ は全射とは限らず $M \setminus \varphi(M)$ 上では一意に定まらない。なお、(8) 式はこれに関わらず成り立つ。

§１２．ベクトル場と １パラメーター変換群

p	位置	誤	正
76	8 行目	$\cdots\lvert t\rvert < \varepsilon$ のとき$\cdots\lvert s\rvert, \lvert t\rvert, \lvert s+t\rvert < \varepsilon$ ならば	$\cdots\lvert t\rvert < \varepsilon_p$ のとき$\cdots\lvert s\rvert, \lvert t\rvert, \lvert s+t\rvert < \varepsilon_p$ ならば
76	定理２	(*1)	(*1)
79	6 行目	§９， (5) により	§１１， (5) により
79	15 行目	$\cdots = X_p\left(\frac{d^m F}{dt^m}(0,p)\right) = X_p\left[\frac{d^m f((\mathrm{Exp}\,sX)(p))}{ds^m}\right]_{s=0}$	$\cdots = X_p\left(\frac{d^m F}{dt^m}(0,x)\right) = X_p\left[\frac{d^m f((\mathrm{Exp}\,sX)(x))}{ds^m}\right]_{s=0}$

(*1) 反例がある（らしい）。間違っている箇所は 76 ページの一番下の「条件 3) および補題より $|t| < \varepsilon$, $|t+s| < \varepsilon$ なるかぎり ${\varphi_t}^{(\alpha)}({\varphi_s}^{(\beta)}(p)) = {\varphi^{(\beta)}}_{t+s}(p)$ となる」という部分。${\varphi_t}^{(\beta)}({\varphi_s}^{(\beta)}(p)) = {\varphi^{(\beta)}}_{t+s}(p)$ なら 1 パラメーター局所群の定義の 3) から成り立つが、当該の部分は一般に成り立たない。

§１３．リーマン多様体の無限小運動

p	位置	誤	正
80	補題の証明	(*1)	(*1)
81	17 行目	$= -{\varphi_s}^*(f(t;Y,Z)) + f(s;\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}Y)$	$= {\varphi_{-s}}^*(f(t;Y,Z)) + f(s;\varphi_{t*}Y, \varphi_{t*}Z)$ (*2)
81	18 行目	$\left[\frac{d}{ds}f(s;\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}Y)\right]_{s=0} = 0$	$\left[\frac{d}{ds}f(s;\varphi_{t*}Y, \varphi_{t*}Z)\right]_{s=0} = 0$
81	20 行目	常微分方程式の解の一意性より$\cdots$	(*3)

(*1) §１０． (*2) と同様、前みたいに領域を重ねる。開集合 W を $\bar{U} \subset W$ となるようにとり、

$$X_q = \begin{cases} f(q)Y_q & q \in W \\ 0 & q \notin U \end{cases}$$

とすればよい。

(*2) 英語版松島多様体[3] では、ここの $+$ が $=$ になっているが、これは間違いである。

(*3) 偏微分方程式である。（A.1 参照）

[3] Differentiable Manifolds / Yozo Matsushima ; translated by E.T.Kobayashi. – M.Dekker, 1972. – (Monographs and textbooks in pure and applied mathematics ; 9).

§１４．パラコンパクト多様体と単位の分割

(*1) 定義 3 について、パラコンパクトの定義にはハウスドルフ性を仮定しないこともある。また、定義 4 について、単位の分割（一の分割）の従属する開被覆には局所有限性を課さないこともある。

p	位置	誤	正
82	27 行目	$W \cap V_i' \neq \emptyset$（なる $i \in I_\alpha$	$W \cap V_i' \neq \emptyset$ なる $i \in I_\alpha$
83	25 行目	$f_\alpha(q) = 0$	$f_\alpha(p) = 0$
84	29 行目	$\bar{V}_p$ はコンパクト $V_p \cap \bar{V} = \emptyset \cdots$	$\bar{V}_p$ はコンパクトで $V_p \cap \bar{V} = \emptyset \cdots$
85	4 行目	$g(p) = \displaystyle\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) g_\alpha(p)$	(*1)

(*1) p は M の各点としているが、該当箇所の直前に書いているように、g_α は g_p を U_α に制限したものであって $p \notin U_\alpha$ なる p で $g_\alpha(p)$ は定義されていない。U_α の外での g_α の値を 0 と定めるか、和 $\displaystyle\sum_{\alpha \in A}$ の意味を「$p \in M$ に対し $p \in U_\alpha$ を満たす α についての和 $\displaystyle\sum_{\alpha \in A; p \in U_\alpha}$ 」と解釈する。なお、$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は局所有限であるから、この和は有限和である。

§１５．多様体の位相に関する種々の注意

p	位置	誤	正
85	28 行目	もつとし $^{*)\cdot}$ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を⋯	もつとし $^{*)}$，$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を⋯
86	9 行目	$\mathbb{R}^n$ の立方体	(*1)
86	11 行目	$\mathbb{R}^N$	$\mathbb{R}^n$
86	19 行目	$V = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} W_{p_i}$	$V = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} W_{p_i}$
86	補題 2		(*2)
88	24 行目	$\{V_m\}_{n \in N}$	$\{V_m\}_{m \in N}$
89	19 行目	$\mathbb{A}^m$ の標準座標を $\{x^1, \ldots, x^m\}$	$\mathbb{A}^m$ の標準座標を $(x^1, \ldots, x^m)$
89	23 行目	$\varphi(p) = (y^{i_1}(p), \ldots, y^i{}_n(p))$	$\varphi(p) = (y^{i_1}(p), \ldots, y^{i_n}(p))$
89	28 行目	$\mathbb{R}^m$ の立方体	(*3)

(*1) ここの n は X の次元。

(*2) 補題 2 にある証明の中では、パラコンパクトの定義に含まれている X のハウスドルフ性を証明していないようにみえる。理由として、ここにおいてのみパラコンパクトの定義にハウスドルフ性を仮定していないか、もともと X はハウスドルフ位相空間としていることが考えられる。補題 1 において X は位相多様体としていることから、（明示されていないが）補題 2 でも X は位相多様体としているものと考えられる。

(*3) ここの m は M' の次元。

§１６．複素多様体

§１７．概複素構造

3　微分形式とテンソル場

§１．p 次線型形式

p	位置	誤	正

§２．対称テンソルと交代テンソル、外積

p	位置	誤	正
114	18 行目	$\bigotimes^{p} V^* = \bigwedge^{p} V + N^p$	$\bigotimes^{p} V^* = \bigwedge^{p} V^* + N^p$
114	19 行目	$f = \frac{1}{p!}A_p\varphi + \left(f - \frac{1}{p!}A_p\varphi\right)$	$f = \frac{1}{p!}A_p f + \left(f - \frac{1}{p!}A_p f\right)$
114	20 行目	$f - \frac{1}{p!}A_p\varphi \in N^p$ また $\dfrac{1}{p!}A_p\varphi \in \bigwedge^{p} V^*$	$f - \frac{1}{p!}A_p f \in N^p$ また $\dfrac{1}{p!}A_p f \in \bigwedge^{p} V^*$
116	22 行目	$\cdots = \det(\psi_i(u_{\sigma(j)}))_{i,j=1,,p-1}$	$\cdots = \det(\psi_i(u_{\sigma(j)}))_{i,j=1,\ldots,p-1}$
116	24 行目	$\bigwedge^{p} V = (0)$	$\bigwedge^{p} V^* = (0)$
117	4 行目	$\dfrac{1}{(p-1)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{Z}}\left\{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \cdots\right\}$	$\dfrac{1}{(p-1)!}\sum_{\tau\in\mathfrak{Z}}\left\{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \cdots\right\}$
118	3 行目	$\sum_{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathfrak{T}_p} \lambda_{i_1,\ldots,i_p}\varphi^{i_1}\wedge\cdots\varphi^{i_p} = 0$	$\sum_{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathfrak{T}_p} \lambda_{i_1,\ldots,i_p}\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi^{i_p} = 0$
119	9 行目	$+\sum_{i=1}^{q}(-1)^{p+j+1}i(v)\theta_j(\ \cdots\ )$	$+\sum_{j=1}^{q}(-1)^{p+j+1}i(v)\theta_j(\ \cdots\ )$
119	12 行目	$\psi \in^p \bigwedge V^*, \theta \in^q \bigwedge V^*$	$\psi \in \bigwedge^{p} V^*, \theta \in \bigwedge^{q} V^*$
119	25 行目	V^* の基を $\{\varphi^1, \ldots \varphi^n\}$	V^* の基を $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$

§３．多様体上の共変テンソル場と微分形式

p	位置	誤	正
120	24 行目	$(ft)\otimes s = t\otimes fs = f(t\otimes s)$	$(ft)\otimes s = t\otimes (fs) = f(t\otimes s)$
120	27 行目	$\bigotimes^{0} T_a{}^* = \mathbb{R}$	$\bigotimes^{0} T_a{}^*(M) = \mathbb{R}$
122	6 行目	微分形式とする，M の…	微分形式とする．M の…
123	5 行目	$\cdots + g\cdot T(X_1,\ldots,Y_i,\ldots,\ldots,X_n)$	$\cdots + g\cdot T(X_1,\ldots,Y_i,\ldots,X_n)$

§4．テンソル場のリイ微分と微分形式の外微分

p	位置	誤	正
126	13 行目	交代 $(p+1)$ 形式	交代 $(p+1)$ 次形式
127	13,14,15 行目	$\cdots\ i([X,[Y,Z])$	$\cdots\ i([X,[Y,Z]])$
128	28 行目	$-i([X,Y]d\omega.$	$-i([X,Y])d\omega.$
129	15 行目	$=d((i(X)\omega\wedge\theta)$	$=d((i(X)\omega)\wedge\theta)$

§5．写像による共変テンソル場の変換

p	位置	誤	正
131	1 行目	対応 $a\to\varphi^*t$	対応 $a\to(\varphi^*t)_a$
131	25 行目	$=(d\varphi^*f)q(v)$	$=(d\varphi^*f)_q(v)$
132	25 行目	$-s_{\varphi_t(a)}((X_1)_{\varphi t(a)},(X_2)_{\varphi_t(a)})]$	$-s_{\varphi_t(a)}((X_1)_{\varphi_t(a)},(X_2)_{\varphi_t(a)})]$
133	16 行目	Ⅱ，§１３の定理の証明と全く同様にして証明できる	(*1)

(*1) §１３の定理の証明は間違っている。

§6．多様体のコホモロジー

p	位置	誤	正
135	5 行目	ところが $d\omega=0$ および	ところが $d\omega=0$ より $dw\omega=0$ であることおよび
135	6 行目	$d(\omega\wedge w\alpha)=\omega\wedge d\alpha=\omega\wedge\theta$	$d(w\omega\wedge\alpha)=\omega\wedge d\alpha=\omega\wedge\theta$
136	3 行目	$t\geq 1$ のときには $\varphi_1(t,x)=x$	$t\geq 1$ のときには $\varphi(t,x)=x$

§７．複素多様体上の複素微分形式

§８．微分式系と積分多様体

p	位置	誤	正
142	29 行目	$\mathfrak{D}_q$ の次元は r 以上になるから	$\mathfrak{D}_q$ の次元は r より大きくなるから
143	4 行目	$\omega^1 = \cdots = \omega^{n-r} = 0$	$\omega_1 = \cdots = \omega_{n-r} = 0$
143	4 行目	条件 (2)	条件 (3)
143	5 行目	$\iota^*\omega^i = 0$	$\iota^*\omega_i = 0$
144		定理 1 （Frobenius）の証明	(*1)
145	10 行目	$\theta_\alpha = dx^\alpha - \sum_{j=n-r+1}^{r} \Phi_{\alpha j} dx^j$	$\theta_\alpha = dx^\alpha - \sum_{j=n-r+1}^{n} \Phi_{\alpha j} dx^j$
146	9 行目	$= \sum_{k=1}^{r} \Phi_{\alpha k}(st, xy(t)) x^i{}_s$	$= \sum_{k=1}^{r} \Phi_{\alpha k}(st, xy(t)) x^k{}_s$
146	14 行目	とおくと $\psi(t; x; a)$ は (5) の解である	とおくと $\psi(t, x, a)$ は (5) の解である
146	20 行目	すなわち ψ_α は方程式	すなわち Ψ_α は方程式
147	8 行目	$\Psi_a{}^*(d\omega_\alpha) = d\Psi(\omega_\alpha) = \cdots$	$\Psi_a{}^*(d\omega_\alpha) = d(\Psi_a{}^*\omega_\alpha) = \cdots$
147	10 行目	$\Psi_a{}^*(d\omega^\alpha) = \cdots$	$\Psi_a{}^*(d\omega_\alpha) = \cdots$
150	18 行目	$= \{v \in T_q(M) \mid (\omega_{r+1})_q \cdot (v) = \cdots = (\omega_n)_q(v)\}$	$= \{v \in T_q(M) \mid (\omega_{r+1})_q(v) = \cdots = (\omega_n)_q(v)\}$

(*1) この証明でも常微分方程式の解の存在と一意性定理を適応しているが、どうにも怪しい。145 ページの 25 行目と 147 ページの 14-16 行目である。

§９．積分可能な概複素構造への応用

§１０．極大連結積分多様体

4　リイ群と等質空間

§１．位相群

p	位置	誤	正
160	18 行目	$U_3 \subset U \cap U_2$ となる $U_3 \in \mathfrak{U}$ が存在する	$U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となる $U_3 \in \mathfrak{U}$ が存在する

§２．位相群の部分群と商空間

p	位置	誤	正
162	27-28 行目	写像 $\psi : (xH, gH) \to xy^{-1}H$	写像 $\psi : (xH, yH) \to xy^{-1}H$

§３．位相群の同型と準同型

p	位置	誤	正

§4．位相群の連結成分

5　微分形式の積分とその応用

§1．多様体の向きづけ

§2．微分形式の積分

§3．リイ群上の不変積分

§4．不変積分の応用

§5．ストークスの定理

§6．写像度

§7．ベクトル場の発散、ラプラシアン

付録 A

A.1　偏微分方程式に対して常微分方程式の解の存在と一意性定理を適用している箇所について

ゼミ中には、完全な解決が得られなかった。参考までに、一応英語版松島の該当する箇所を引用しておく。

（89 ページの (5) 以降）

If we differentiate this quality with respect to s and set $s = 0$, then, since $[df(s; \phi_{t*}Y, \phi_{t*}Z)/ds]_{s=0} = 0$, we have

$$\frac{df(t; Y, Z)}{dt} = -Xf(t; Y, Z).$$

On the other hand we have

$$X(f(t; Y, Z)) = -X(\varphi^*_{-t}(g(Y, Z))) + X(g(\varphi_{t*}Y, \varphi_{t*}Z)) \tag{6}$$

and, since X is the infinitesimal transformation of φ_{t*}, we have

$$X(\varphi^*_{-t}(g(Y, Z))) = \varphi^*_{-t}(X(g(Y, Z))), \tag{7}$$

as we see easily from the definition of differentiation by X. On the other hand, as X is an infinitesimal motion, we have

$$X(g(\varphi_{t*}Y, \varphi_{t*}Z)) = g([X, \varphi_{t*}Y], \varphi_{t*}Z) + g(\varphi_{t*}Y, [X, \varphi_{t*}Z])$$

and we also have $\varphi_{t*}X = X$ by Theorem 3 of § 12. Hence, by (8) of § 11, we obtain

$$\begin{aligned} X(g(\varphi_{t*}Y, \varphi_{t*}Z)) &= g(\varphi_{t*}[X, Y], \varphi_{t*}Z) + g(\varphi_{t*}Y, \varphi_{t*}[X, Z]) \\ &= f(t; [X, Y], Z) + f(t; Y, [X, Z]) + \varphi^*_{-t}(g([X, Y], Z)) + \varphi^*_{-t}(g(Y, [X, Z])) \end{aligned} \tag{8}$$

It follows from (6), (7), (8) and the fact that X is an infinitesimal motion that

$$X(f(t;Y,Z)) = f(t;[X,Y],Z) + f(t;Y,[X,Z]).$$

Therefore the function $f(t;Y,Z)$ satisfies, as a function of t, the differential equation

$$\frac{df(t;Y,Z)}{dt} = -f(t;[X,Y],Z) - f(t;Y,[X,Z]). \tag{9}$$

We see easily from the definition of $f(t;Y,Z)$ that we have the following properties:

$$\begin{aligned} f(t;Y,Z) &= f(t;Z,Y), \\ f(t;Y+Y',Z) &= f(t;Y,Z) + f(t;Y',Z), \\ f(t;hY,Z) &= (\varphi_{-t}^* h) f(t;Y,Z) \quad \text{for any function } h. \end{aligned}$$

Let p be an arbitrary point of M and let $\{x^1,\dots,x^n\}$ be a local coordinate system in a neighborhood U of p. Let $X_i = \partial/\partial x^i$ and $X = \sum_i \xi^i X_i$ on U. Then $[X,X_i] = \sum_j h_i^j X_j$ with $h_i^j = -\partial\xi^j/\partial x^i$. Since we can restrict our consideration for f to U, we put $f(t;X_i,X_k) = f_{ik}(t;x)$ ($x \in U$). Then $f(t;[X,X_i],X_k) + f(t;X_i,[X,X_k]) = \sum_j h_i^j(\varphi_{-t}(x)) f_{jk}(t;x) + \sum_j h_k^j(\varphi_{-t}(x)) f_{ij}(t;x)$, and it follows from (9) that

$$\frac{df_{ik}(t;x)}{dt} = -\sum_j h_i^j(\varphi_{-t}(x)) f_{jk}(t;x) - \sum_j h_k^j(\varphi_{-t}(x)) f_{ij}(t;x) \tag{10}$$

for each $x \in V$ and $|t| < \varepsilon$, where V is a neighborhood of p such that $\varphi_{-t}(V) \subset U$ for each t such that $|t| < \varepsilon$. This shows that, for each $x \in V$, the functions $f_{ik}(t;x)$ of t are the solutions of (10) with the initial condition $f_{ik}(t;x) = 0$. Obviously, the functions of t which are identically equal to zero from a solution of (10) with the same initial conditions. Hence, by the uniqueness theorem of the solution of (10), we see that $f_{ik}(t;x) = 0$ for each $x \in V$ and $|t| < \varepsilon$. Let $Y \sum \eta^i X_i$ and $Z = \sum \zeta^i X_i$ on U. Then $f(t;Y,Z) = \sum_{i,k} \eta^i(\varphi_{-t}(x)) \zeta^k(\varphi_{-t}(x)) f_{ik}(t;x)$ for $|t| < \varepsilon$ and for any Y and Z. Then using (5) repeatedly, we see that $f(t;Y,Z) = 0$ for any t. In particular, $f(t;Y,Z) = 0$ at p for any t and any Y and Z. Since p is an arbitrary point of M, we get $f(t;Y,Z) = 0$ and this proves that φ_t is an isometry for all $t \in \mathbb{R}$.

偏微分方程式であることはちゃんと指摘されている。なお、これも間違ってるらしい (？)。

A.2 Sard の定理の証明

以下 Sard の定理への準備とその証明。

定義 1 (多重指数 multi-index)**.** 0 以上の整数の集合を $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ とし、$\mathbb{Z}_+$ の d 個の直積を ${\mathbb{Z}_+}^d$ とする。このとき、${\mathbb{Z}_+}^d$ の元を多重指数という。

多重指数 $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ 、 $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_d) \in {\mathbb{Z}_+}^d$ に対して、

$$\begin{aligned} \alpha \pm \beta &= (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_d \pm \beta_d) \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \\ \alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_d! \end{aligned}$$

と表す。また、 $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対し、

$$x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_d}^{\alpha_d}$$

とし、 d 変数関数 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対し、

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_d}^{\alpha_d}} f \\ &= \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_d}^{\alpha_d}} f \end{aligned}$$

と略記する。ただし、 $0^0 = 1$ と定め、 $\alpha_j = 0$ のとき $\partial {x_j}^{\alpha_d}$ は x_j で偏微分しないことを意味する。

多重指数を使えば、通常煩雑となってしまう多変数関数の Taylor の定理も次のように簡潔に書ける。

定理 2 (Taylor の定理)**.** $\mathbb{R}^d$ 上の C^N 級関数 $f(x)$ に対し、

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R_N$$

が成り立つ。ただし、剰余項は、

$$R_N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha \quad (0 < \theta < 1)$$

である。

さて、Sard の定理を証明する前に使用する定理を述べておく。

定理 3 (Fubini の定理)**.** N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度を μ_N とする ($N \geq 2$)。$\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ において部分集合 $A \subset \mathbb{R}^N$ が μ_N-可測のとき、

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mu_{N-1}(A \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{N-1}) = 0$$

ならば、

$$\mu_N(A) = 0$$

定理 4 (Lindelöf の被覆定理)**.** $\mathbb{R}^N$ の部分集合 E と開集合族 $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、

$$E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

ならば、 $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の中から可算個の開集合 $\{G_{\lambda_k}\}_{k=1}^\infty$ を選んで、

$$E \subset \bigcup_{k=1}^\infty G_{\lambda_k}$$

とできる。

定理 5 (Sard の定理)**.** $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級ベクトル値関数 $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ に対し、その臨界点は" ほとんどない"。すなわち、 f の臨界点の集合 を

$$C = \{x \in U \mid \mathrm{rank}_x(f) < m\}$$

とすると、

$$\mu_m(f(C)) = 0$$

が成り立つ。

証明. これは、$n \geq 0$、$m \geq 1$ で意味をなす。

0 以上の整数 n に対して、Sard の定理が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

(I)$n = 0$ のとき、

$U = \{0\}$ または $\emptyset$ で、 $f(C) = \{*\}$ または $\emptyset$ であるから、 $\mu_m(f(C)) = 0$。

(II) $n - 1$ まで Sard の定理が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned} C_k &= (\text{階数が } k \text{ 以下の } f \text{ のすべての偏導関数が } 0 \text{ になるような点 } x \text{ の集合}) \\ &= \{x \in U \mid \frac{\partial^l f_j}{\partial x_{r_1} \dots \partial x_{r_l}}(x) = 0; j = 1, \dots, m, 1 \leq l \leq k, 1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_l \leq n\} \end{aligned}$$

とおく（$k = 1, 2, \dots$）と、

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \dots$$

証明を次の三段に分ける

第一段：$\mu_m(f(C - C_1)) = 0$ が成立

第二段：$\mu_m(f(C_k - C_{k+1})) = 0$ が成立

第三段：十分大きな k に対して、$\mu_m(f(C_k)) = 0$

（第一段）

$m \geq 1$ に対して、$\mu_m(f(C - C_1)) = 0$ を示す。

(i) $m = 1$ のとき、（Fubini の定理が使えない）

$$f : U \to \mathbb{R}$$

であり、

$$C_1 = \{x \in U \mid \frac{\partial f}{\partial x_r}(x) = 0; r = 1, \dots, n\}$$

となる。

$$\begin{aligned} C &= \{x \in U \mid \mathrm{rank}_x(f) < 1\} \\ &= \{x \in U \mid \mathrm{rank}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_r}(x)\right\} = 0\} \\ &= \{x \in U \mid \frac{\partial f}{\partial x_r}(x) = 0; r = 1, \dots, n\} \\ &= C_1 \end{aligned}$$

となるので、

$$f(C - C_1) = f(\emptyset) = \emptyset$$

よって、

$$\mu_1(f(C - C_1)) = \mu_1(\emptyset) = 0$$

(ii) $m \geq 2$ のとき、

「任意の $x \in C - C_1$ に対して、ある x の開近傍 $V(x) \subset U$ が存在して

$$\mu_m(f(V(x) \cap C)) = 0$$

となる」……(*)

　ことを示せばよい。

　なぜなら、(*) が成り立てば、$\{V(x) \mid x \in C - C_1\}$ は $C - C_1 \subset \mathbb{R}^n$ の開被覆であるから、Lindelö f の被覆定理より、$\{V(x) \mid x \in C - C_1\}$ の可算な部分被覆 $\{V_l\}_{l=1}^{\infty}$ が存在して、

$$C - C_1 \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} V_l$$

となる。これと、

$$^\forall l \in \mathbb{N}, \quad \mu_m(f(V_l \cap C)) = 0$$

より、

$$\begin{aligned} C - C_1 &= \bigcup_{l=1}^{\infty}(V_l \cap (C - C_1)) \\ &\subset \bigcup_{l=1}^{\infty}(V_l \cap C) \end{aligned}$$

だから、

$$f(C - C_1) \subset f\left(\bigcup_{l=1}^{\infty}(V_l \cap C)\right) = \bigcup_{l=1}^{\infty} f(V_l \cap C)$$

よって、

$$\begin{aligned} \mu_m(f(C - C_1)) &\leq \mu_m\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} f(V_l \cap C)\right) \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu_m(f(V_l \cap C)) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mu_m(f(C - C_1)) = 0$$

と示せるからである。

　さて、(*) を示す。$p \in C - C_1$ とする。

　$p \notin C_1$ であるから、

$$^\exists(j, r),\ \frac{\partial f_j}{\partial x_r}(p) \neq 0$$

添え字を適当に入れ替えて、 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ としても一般性は失われない。

　$U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された写像 $h : U \to \mathbb{R}^n$ を、

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_n)$$

とおくと、

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\det(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p)) = \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$$

よって、逆関数定理により、 h は、 p のある開近傍 $V \subset \mathbb{R}^n$ を、 $h(p)$ の開近傍 $V' \subset \mathbb{R}^n$ へ微分同相に写す。

ここで、

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^m$$

を考える。

$$C' = (g \text{ の臨界点の集合})$$

とすれば、

$$C' = h(V \cap C)$$

であるから、

$$\begin{aligned} g(C') &= g(h(V \cap C)) = f \circ h^{-1}(h(V \cap C)) \\ &= f(V \cap C) \end{aligned}$$

一方、各 $(t, x_2, \ldots, x_n) = y \in V'$ に対して、 $h : V \simeq V'$ より

$$^{\exists!}\bar{x} \in V,\ h(\bar{x}) = y$$

このとき、 $g = f \circ h^{-1}$ より $g \circ h = f$ だから、

$$\begin{aligned} g(y) &= g(h(\bar{x})) = f(\bar{x}) \\ &= (f_1(\bar{x}), \ldots) \end{aligned}$$

ここで、 $h(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = y$ であることから

$$f_1(\bar{x}) = t$$

よって

$$g(y) = (t, \ldots) \in \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$$

となるから、対応

$$(t, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto g(t, x_2, \ldots, x_n)$$

により写像

$$g^t : V' \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} \simeq \mathbb{R}^{m-1}$$

が得られる。 g^t の定義より

$$g^t = g\,|_{\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}}$$

が成り立つ。帰納法の仮定から

$$C^t = (g^t \text{ の臨界点の集合}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

とおくと

$$\mu_{m-1}(g^t(C^t)) = 0 \tag{1}$$

となる。このとき $g = (x, g^t)$ より

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g_k^t}{\partial t} & \left(\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}\right) \end{pmatrix}$$

であるから

$$g(C') \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} = g^t(C^t)$$

(1) より

$$\mu_{m-1}(g(C') \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) = 0$$

となる。

$t \in \mathbb{R}$ は任意としてよいから、Fubini の定理より

$$\mu_m(g(C')) = 0$$

すなわち

$$\mu_m(f(V \cap C)) = 0$$

したがって、 $p \in C - C_1$ は任意より、(*) が示せた。（第一段終）

(第二段)

$p \in C_k - C_{k+1}$ とすると、 $p \notin C_{k+1}$ より

$$^\exists(r, s_1, \ldots, s_{k+1}), \quad \frac{\partial^{k+1} f_r}{\partial x_{s_1} \ldots \partial x_{s_{k+1}}}(p) \neq 0$$

これに対し、C^∞ 級写像 $w : U \to \mathbb{R}$ を

$$w(x) = \frac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \ldots \partial x_{s_{k+1}}}(x)$$

とおくと

$$w(p) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_{s_1}}(p) \neq 0$$

である。添え字を適当に入れ替えて、 $s_1 = 1$ としてよい。

C^∞ 級写像 $h : U \to \mathbb{R}^n$ を

$$h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_n)$$

とおくと

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial w}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\det\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p)\right) = \frac{\partial w}{\partial x_1}(p) \neq 0$$

よって、逆関数定理より、 h は、 p のある開近傍 $V \subset U$ を、 $h(p)$ のある開近傍 $V' \subset \mathbb{R}^n$ へ微分同相に写す。

ここに、 $x \in C_k \cap V$ のとき、 $w(x) = 0$ より

$$h(x) = (0, \ldots) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

だから、 $h(C_k \cap V) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ となることに注意。

また、

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^m$$

を考え、

$$g^0 : V' \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^m$$

$$g^0 = g \mid_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}}$$

とする。 C^0 を g^0 の臨界点の集合とすると、帰納法の仮定から、

$$\mu_m(g^0(C^0)) = 0$$

さらに

$$h(C_k \cap V) \subset C^0$$

だから

$$\mu_m(g^0 \circ h(C_k \cap V)) \leq \mu_m(g^0(C^0)) = 0$$

$$\therefore \quad \mu_m(g^0 \circ h(C_k \cap V)) = \mu_m(f(C_k \cap V)) = 0$$

したがって、 $C_k - C_{k+1}$ の場合も、(*) が成り立ち、（第一段）(ii) と同様に、

$$\mu_m(f(C_k - C_{k+1})) = 0$$

が成立。（第二段終）

（第三段）

$(k+1)m > n$ すなわち $k > \dfrac{n}{m} - 1$ ならば

$$\mu_m(f(C_k \cap I^n)) = 0 \tag{**}$$

を示す。ここに、 $I^n \subset \mathbb{R}^n$ は一辺の長さが δ である n 次元立方体。

これがわかれば、第一段のときのように

$$f(C_k) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(C_k \cap I_i^n)$$

と表せることから

$$\mu_m(f(C_k)) = \mu_m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} f(C_k \cap I_i^n)\right)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_m(f(C_k \cap I_i^n)) = 0$$
$$\therefore \mu_m(f(C_k)) = 0$$

となる。

(**) を示そう。 $f : C^\infty$ 級より、特に $f : C^{k+1}$ 級だから、Taylor の定理より

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{0<|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R_{k+1}$$

ただし、 $0 < \theta < 1$ として

$$R_{k+1} = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha$$

$x \in C_k$ のとき、 $0 < |\alpha| \le k$ で $\partial^\alpha f(x) = 0$ だから

$$f(x+h) = f(x) + R_{k+1}$$

ここで、 $x \in C_k \cap I^n$、$x + h \in I^n$ に対し

$$\begin{aligned}\|R_{k+1}\| &\le \sum_{|\alpha|=k+1} \|\frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha\| \\ &= \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \|\partial^\alpha f(x+\theta h)\| |h^\alpha|\end{aligned}$$

I^n は凸集合より $x + \theta h \in I^n$。$\partial^\alpha f(x)$ はコンパクト集合 I^n 上連続だから、 $\partial^\alpha f(x)$ は有界で

$$^\exists C_0 > 0, \quad \|\partial^\alpha f(x+\theta h)\| \le C_0$$

が成り立ち

$$\|R_{k+1}\| \le \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{C_0}{\alpha!} |h^\alpha|$$

さらに

$$\begin{aligned}|h^\alpha| &= |h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}| = |h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n} \\ &\le \|h\|^{\alpha_1} \dots \|h\|^{\alpha_n} = \|h\|^{k+1}\end{aligned}$$

だから、 $C = \displaystyle\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{C_0}{\alpha!}$ とおけば

$$\|R_{k+1}\| \le C\|h\|^{k+1}$$

となる。

さて、 I^n を一辺が $\dfrac{\delta}{r}$ である r^n 個の n 次元小立方体に分割する。 I_1 を $x \in C_k$ を含む小立方体とすると、 I_1 の任意の点は $\|h\| \le \sqrt{n}\ \dfrac{\delta}{r}$ となる h を使って、 $x + h$ とかける。

よって、

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x)\| &= \|R_{k+1}\| \\ &\le C\|h\|^{k+1} \\ &\le C\left(\sqrt{n}\ \frac{\delta}{r}\right)^{k+1} = \frac{a}{r^{k+1}}\end{aligned}$$

ただし $a = C(\sqrt{n}\ \delta)^{k+1}$ とおいた。

このことから、 $f(I_1)$ は $f(x)$ を中心とする一辺 $\dfrac{2a}{r^{k+1}}$ の立方体に含まれることがわかる。分割した r^n 個の小立方体それぞれに対し、同様に考えれば、 $f(C_k \cap I^n) \subset f(I^n)$ は高々 r^n 個の立方体の和で全体積 V が

$$V \le r^n \left(\frac{2a}{r^{k+1}}\right)^m = (2a)^m r^{n-(k+1)m}$$

となるものに含まれる。

よって、 $(k+1)m > n$ のとき

$$\mu_m(f(C_k \cap I^n)) \leq V \leq (2a)^m r^{n-(k+1)m}$$

で $r \to \infty$ のとき $r^{n-(k+1)m} \to 0$ より

$$\mu_m(f(C_k \cap I^n)) = 0$$

したがって (**) が示せた。（第三段終）

以上第一段〜第三段より

$$C = (C - C_1) \cup (C_1 - C_2) \cup \cdots \cup (C_{k-1} - C_k) \cup C_k$$

から

$$f(C) = f(C - C_1) \cup \cdots \cup f(C_{k-1} - C_k) \cup f(C_k)$$

$$\therefore \quad \mu_m(f(C)) \leq \mu_m(f(C - C_1)) + \cdots + \mu_m(f(C_{k-1} - C_k)) + \mu_m(f(C_k)) = 0$$

$$\therefore \quad \mu_m(f(C)) = 0$$

これで Sard の定理が示せた。 □

参考文献

[1] J.W. ミルナー，微分トポロジー講義，シュプリンガー・フェアラーク東京，2012

[2] 足立正久，埋め込みとはめ込み，岩波書店，1984

[3] 坪井俊，幾何学 I 多様体入門，東京大学出版会，2005

[4] 松島与三，多様体入門，裳華房，1965

[5] Sard, Arthur. The measure of the critical values of differentiable maps. Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), no. 12, 883–890. http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183504867.

証明は主に、[1] と [2] に沿った。[5] は Sard の定理の原論文である。