3 項間漸化式と行列の標準化

kuttinpa

2014 年 1 月 21 日

このレジュメは、「この内容でだれか新歓講義してくれないかな〜」というのを目的にしています。

1　高校数学の復習

3 項間漸化式

$$a_{n+2} = sa_{n+1} + ta_n \tag{1}$$

を考える。これを解くときには、a_{n+2} を x^2、a_{n+1} を x、a_n を 1 でそれぞれ置き換えた式

$$x^2 = sx + t$$

つまり

$$x^2 - sx - t = 0 \tag{2}$$

の解を求めることから始めるのが通例だった。これを特性方程式と呼ぶ。

これは 2 次方程式なので 2 つの解 α と β を持つ。ここで $\alpha \neq \beta$ とすると

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

となる.。ここから

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n(a_1 - \alpha a_0)$$
$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n(a_1 - \beta a_0)$$

がわかるので、あとはこの 2 式を a_{n+2} と a_{n+1} の連立方程式と見て解くと

$$a_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\left\{\alpha^n(a_1 - \beta a_0) - \beta^n(a_1 - \alpha a_0)\right\}$$

となり、一般項を得ることが出来る。ここで $\dfrac{a_1 - \beta a_0}{\alpha - \beta} = X, \dfrac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha - \beta} = Y$ とすると、この一般項は

$$a_n = X\alpha^n + Y\beta^n \tag{3}$$

の形をしていることが見えてくる。一般に次が言える。

Theorem 1. N 項間漸化式の特性方程式が $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N-1}$ を解に持ち、いずれも重解でないとき、適当な数 $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ があって、

$$a_n = X_1\alpha_1^n + X_2\alpha_2^n + \cdots + X_{N-1}\alpha_{N-1}^n$$

と書ける。ここで各 X_i は n に依存しない定数であることに注意。

　では特性方程式が重解を持つときはどうなるか？つまり元の漸化式が

$$a_{n+2} = 2\alpha a_{n+1} - \alpha^2 a_n$$

となっており、特性方程式が

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0 \tag{4}$$

となった場合について考える。このときは得られる式が

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \alpha^n (a_1 - \alpha a_0)$$

の一本だけとなり、前回のように連立方程式で一般項を求めることはできない。高校数学の教科書でも、こういったパターンが載っているものは少ない。

　もちろんこのパターンも高校数学の範囲で対処が可能である。まず両辺を α^{n+1} で割る。
（$\alpha = 0$ のときは元の漸化式がそのまま一般項を与えているので、考えないこととする）

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha}$$

$\left\{ \dfrac{a_n}{\alpha^n} \right\}$ という数列が等差数列となることがわかるので、

$$\frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_0}{\alpha^0} + \frac{n(a_1 - \alpha a_0)}{\alpha}$$

$$a_n = \left\{ \frac{n(a_1 - \alpha a_0)}{\alpha} + a_0 \right\} \alpha^n$$

となり、一般項がわかった。$\dfrac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} = X, a_0 = Y$ と置くと、この一般項は

$$a_n = (Xn + Y)\alpha^n \tag{5}$$

の形をしている。

2　問題提起

　ところで、式 (3) と (5) を見比べると、ちょっとした違和感を覚える。

　$\alpha \neq \beta$ のときには $a_n = X\alpha^n + Y\beta^n$ が成立していたから、これだけを見て判断すれば、$\alpha = \beta$ になると一般項は $a_n = X\alpha^n + Y\alpha^n = (X + Y)\alpha^n$ となることが予想される。

　ところが実際には $a_n = (Xn + Y)\alpha^n$ であり、なぜか $n\alpha^n$ という項が現れる。

　これは直感に反しているように思えるが、どうしてこういった現象が起こるのだろうか。

3　行列を用いた漸化式の表示

　ふたたび

$$a_{n+2} = sa_{n+1} + ta_n$$

について考える。行列の掛け算については既知とする。

$$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

とする。これは列ベクトルといって、ベクトルを「縦に成分を並べる」ことで表記する方法だが、1 行 2 列の行列だと思ってくれて構わない。

ここで、

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_{n+1} + ta_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_n$$

となるため、$A = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$v_{n+1} = Av_n$$

$$v_n = A^n v_0$$

が成立する。見た目がとても簡単になった。あとは A^n を求めればよいのである。

4 行列の対角化

この section では $x^2 - sx - t = 0$ の解を α と β $(\alpha \neq \beta)$ であるとする。

いわゆる「入試数学」において A^n を求める方法は

- 自力で A^n を予想し、数学的帰納法で証明する方法
- 特別な行列 P が問題文の誘導で与えられ、$P^{-1}AP$ を計算する方法

の 2 種類しかない。

大学ではもっぱら後者の方法が使用される (ただしこの P は自力で求める必要がある)。今回もこの方法を使おう。つまり、

$$\text{なんらかの } P \text{ を用いることで、} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ と変形できる}$$

ことを示す。もしもこれが示されれば、

$$\left(P^{-1}AP\right)^n = P^{-1}APP^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP$$
$$\left(P^{-1}AP\right)^n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

より

$$A^n = P\left(P^{-1}AP\right)^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{6}$$

ここまでくれば式 (3) の成立はほぼ明らかである。

4.1 固有値と固有ベクトル

行列 A に対して、複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ と 0 でない列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ があり

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{7}$$

を満たす時、この λ を A の**固有値**、$\mathbf{x}$ を λ に属する A の**固有ベクトル**という。

この λ を求める方法について考えてみる。単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用いると $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$ であるため、式 (7) は

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = 0$$

と変形される。これを満たすためには

$$det(\lambda E - A) = 0 \tag{8}$$

が必要である。A が n 次の正方行列であればこれは n 次方程式なので、固有値はたかだか n 個である。また、この式 $det(\lambda E - A)$ を A の**固有方程式**といい、固有方程式の解としての重複度をその固有値の**重複度**という。

今回は $A = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なので、つまり

$$det \begin{pmatrix} \lambda - s & -t \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

が必要である。$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ であるから、この式は

$$\lambda(\lambda - s) - (-t) \cdot (-1) = 0$$
$$\lambda^2 - s\lambda - t = 0$$

となる。これが式 (2) と一致するのは偶然ではない。これの解は $\lambda = \alpha, \beta$ であったから、固有値は α と β の 2 つである。λ が式 (8) を満たすときに対応する $\mathbf{x}$ が必ず存在するかどうかはまだ証明していないが、とりあえず 1 本以上は存在することを認める。なお $\mathbf{x}$ が固有値 λ に属する固有ベクトルであれば、$c\mathbf{x}(c \in \mathbb{C}, c \neq 0)$ も λ に属する固有ベクトルであり、普通これらをまとめて 1 本と数える。

4.2 一次変換と基底の変換行列

(以下、対角化の簡単な説明)

5 標準化と Jordan 標準形

- $A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の場合は、対角化が不可能
- そうなった場合、できるだけ簡単にしようということで「標準化」を行う。その際行き着く先が Jordan 標準系である
- $A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を標準化すると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ である
- $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ であり、式（5）に出てくる $n\alpha^n$ の項が無事現れるので、問題解決である
- ちなみに N 項間特性方程式の解 α が p 重解となった場合、(n に関する $p-1$ 次式) $\times \alpha^n$ が現れることもわかる

6 まとめ

- 数列の漸化式は、行列を用いて考察することができた。
- 重解を持たない場合と持つ場合では「対角化できる or できない」という決定的な差があり、一般項の形に現れる差はここから来ている。