スペクトル分解と Egorov の補題

ryo

平成 29 年 3 月 15 日

概 要

エルミート行列がユニタリ作用素により対角化されるのと同様にヒルベルト空間上の自己共役作用素 (エルミート作用素) はスペクトル分解される．Hilbert 空間上の有界線型作用素全体から成る空間 B(H) の積と共役について閉じた閉部分空間を C*-環 という．可換 C*-環 は局所コンパクト空間上の無限遠点で 0 になる連続関数のなす空間と同型になり，特に単位元を持つ可換 C*-環 はコンパクトハウスドルフ空間上の連続関数のなす空間と同型となる．さらに，B(H) の C*-環 で弱閉なものを von Neumann 環といい，可換 von Neumann 環はあるコンパクト空間 Γ と Γ 上の正のラドン測度 μ を用いて $\mathrm{L}^\infty(\Gamma,\mu)$ と表される．このアナロジーから Egorov の補題を非可換に拡張できる．

1 準備

定義 1.1. *Hilbert* 空間 H 上の有界線型作用素全体のなす空間 *B(H)* の共役，積について閉じた閉部分ベクトル空間のことを C*-環 という．
ただし，$B(H)$ には $||T|| = \sup\{||Tx|| \,|\, x \in H,\, ||x|| = 1\}$ によりノルムが入る．

注 1. $S, T \in B(H)$ に対して，

- $||T|| = ||T^*||$;
- $||T||^2 = ||T^*T||$;
- $||ST|| \leq ||S||||T||$.

定義 1.2. $[AH]$ により，$span\{Tx|T \in A,\, x \in H\}$ の閉包を表す．
$[AH] = H$ であるとき，A は H に既約であるという．

以下，C*-環 は既約であるとする．

定義 1.3. A, B を C*-環 とする．複素線形写像 $T : A \to B$ が積と共役を保つとき，準同型という．さらに，T が全単射であるとき，A と B は同型であるという．

注 2. C*-環 から C*-環 への準同型は *norm-decreasing(i.e.*$||Tu|| \leq ||u||$*)* であり，さらに単射であるとき，等長（*i.e.*$||Tu|| = ||u||$）である．

次に固有値の一般化であるスペクトルを定義する．

定義 1.4. A を C*-環 とする．· $\tilde{A} = span\{\mathrm{id}_H\} \cup A$ と定める．
· $T \in A$ に対し，
$\sigma(T) := \sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda 1 - T : \tilde{A}$ 内で可逆でない $\}$
と定め，これを T のスペクトルという．
· スペクトル半径を $r(T) = \sup\{|\lambda| \,|\lambda \in \sigma(T)\}$ で定める．

- $\sigma(T)$ は空ではなく，コンパクトである．
- 自己共役作用素のスペクトルは実数である．

- 一般にスペクトルと固有値 (i.e. $\ker(\lambda 1 - a) \neq 0$) は一致しない.
- P が射影 $\Leftrightarrow \sigma(P) \subset \{0, 1\} \Leftrightarrow P^2 = P,\ P^* = P$.
- $T = T^*$ のとき, $||T|| = r(T)$ である.

例 1. $(C(\Omega))$
Ω をコンパクトハウスドルフ空間とする.
$C(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}|$ 連続 $\}$ とすると, これは C*-環 となる.
$l^2(\Omega) := \{(a_\omega)_{\omega\in\Omega}|$ 可算個を除いて $0, \sum_{\omega\in\Omega} |a_\omega|^2\}$ と定めると *Hilbert* 空間になる.
$f \in C(\Omega)$, $(a_\omega) \in l^2(\Omega)$ に対して, $T_f((a_\omega)_{\omega\in\Omega}) = (f(\omega)a_\omega)_{\omega\in\Omega}$ と定めると, $T : C(\Omega) \to B(l^2(\Omega))\ f \mapsto T_f$ は等長準同型となるので, $C(\Omega)$ とするとこれは C*-環 となる.
$||f||_\infty := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ とすると, $||T_f|| = ||f||_\infty$ となる.
また, 0 を通らなければ可逆なので, $\sigma(T_f) = \mathrm{Im}(f)$ である.

例 2. $(C_0(\Omega))$
$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega)|\forall\epsilon > 0, \{\omega \in \Omega||f(\omega)| \geq 0\}$ がコンパクト $\}$ とすると, これは前の例と同様にして C*-環 となる.

例 3. $M_n(\mathbb{C})$
作用素ノルムに関して C*-環.
ただし, 作用素ノルムは $||T|| := \sup\{||Tx|| : x \in \mathbb{C}^n,\ ||x|| = 1\}$.

$B(H)$ には作用素ノルム以外にも強位相, 弱位相, σ 弱位相が入る.

定義 1.5.
- $U_{T,F,\epsilon} := \{S \in B(H)|\,||(T - S)x|| < \epsilon(x \in F)\}$ と定めたとき, $\{U_{T,x,\epsilon}|T \in B(H),$ 有限集合 $F \subset H, \epsilon > 0\}$ に生成される位相を強位相という.
- $F_{T,F,\epsilon} := \{S \in B(H)|\,|\langle(T - S)x, y\rangle| < \epsilon((x, y) \in F)\}$ と定めたとき, $\{F_{F,\epsilon}|T \in B(H),$ 有限集合 $F \subset H, \epsilon > 0\}$ にとして生成される位相を弱位相という.
- $U_{T,\{\xi_n\},\epsilon} := \{S \in B(H)|\ \sum_{n=1}^\infty ||(T - S)\xi_n|| < \epsilon\}$ と定めたとき, $\{U_{T,\{\xi_n\},\epsilon}|T \in B(H), \{\xi_n\}, \{\eta_n\} \subset H, \sum_{n=1}^\infty ||\xi||^2 < \infty, \sum_{n=1}^\infty, \epsilon > 0\}$ に生成される位相を σ 強位相という.
- $U_{T,\{\xi_n\},\{\eta_n\},\epsilon} := \{S \in B(H)|\,|\sum_{n=1}^\infty \langle(T - S)\xi_n, \eta_n\rangle| < \epsilon\}$ と定めたとき, $\{U_{T,\{\xi_n\},\{\eta_n\},\epsilon}|T \in B(H), \{\xi_n\}, \{\eta_n\} \subset H, \sum_{n=1}^\infty ||\xi||^2 < \infty, \sum_{n=1}^\infty ||\eta||^2 < \infty, \epsilon > 0\}$ に生成される位相を σ 弱位相という.

$A \subset B(H)$ に対して, その強位相, 弱位相, σ 弱位相に関する閉包をそれぞれ $\overline{A}^s$, $\overline{A}^w$, $\overline{A}^{\sigma-w}$ により表す.

ネット $\{T_i\}_{i\in I} \subset B(H)$ が $T \in B(H)$ に強位相, 弱位相, σ 弱位相に関して収束するとは, それぞれ任意の $x \in H$ に対して $\lim_{n\to\infty} ||(T - T_n)x|| = 0$, 任意の $x, y \in H$ に対して $\lim_{n\to\infty} |\langle(T - T_n)x, y\rangle| = 0$, 任意の $\{\xi_n\} \subset H$ で $\sum_{n=1}^\infty ||\xi||^2 < \infty$ なるものに対して, $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^\infty ||(T - S)\xi_n|| = 0$, 任意の $\{\xi_n\}, \{\eta_n\} \subset H$ で $\sum_{n=1}^\infty ||\xi||^2 < \infty, \sum_{n=1}^\infty ||\eta||^2 < \infty$ なるものに対して, $\lim_{n\to\infty} |\sum_{n=1}^\infty \langle(T - S)\xi_n, \eta_n\rangle| = 0$ ということである. これらをそれぞれ $s\text{-}\lim_i T_i = T$, $w\text{-}\lim_i T_i = T$, $\sigma\text{-}s\text{-}\lim_i T_i = T$, $\sigma\text{-}w\text{-}\lim_i T_i = T$ とかく.

2 スペクトル分解

定理 2.1. 自己共役作用素 $T = T^* \in B(H)$ は，ある一意なスペクトル族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を用いて，$x,\, y \in H$

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda d\langle E_\lambda x, y\rangle$$

と表される．このとき，

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda$$

となる．さらに，$f \in C(\sigma(T))$ に対して，

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_\lambda$$

となる．
ここで，$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ がスペクトル族とは，射影の族で次の四つの条件を満たすものである．

- (単調増加) $\lambda < \mu$ であるとき，$E_\lambda \leq E_\mu$;
- (右連続) $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，$s - \lim_{t\to\lambda+0} E_t = E_\lambda$;
- $s\text{-}\lim_{t\to\lambda-\infty} E_t = 0$;
- $s\text{-}\lim_{t\to\lambda+\infty} E_t = \mathrm{id}_H$.

このセクションではスペクトル分解のスペクトル族の構成を行う．
まず，有限次元の場合に正しいことを示す．

定理 2.2. エルミート行列 $T = T^* \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，ユニタリ行列 $U \in M_n(\mathbb{C})$ $(i.e. UU^* = U^*U = 1)$ と固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ が存在して，$UTU^* = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ と表される．

Proof. $\lambda \in \mathbb{C}$ を T の固有値，$v \in \mathbb{C}$ をそれに対応したノルム 1 の固有ベクトルとする．

$$\lambda = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}$$

従って，$\lambda \in \mathbb{R}$ となる．
$V = \mathbb{C}v$ とし，$W = V^\perp$ とする．$w \in W$ とする．

$$\langle Tw, v\rangle = \langle w, Tv\rangle = \langle w, \lambda v\rangle = 0$$

よって，$T(W) \subset W$ となる．
これを帰納的に繰り返して，ある V の互いに直交した 1 次元閉部分空間 $V_1, \cdots, V_n$ で $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ となり，$T(V_i) \subset V_i$ となるものが存在する．V_i は 1 次元なのである $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，$T|_{V_i} = \mathrm{id}_{V_i}$ となる．$v_i \in V_i$ でノルム 1 になるものが存在する．$U = (v_1, \cdots, v_n)$ とすると，これはユニタリで $UTU^* = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となる． □

このとき，$P_i : \mathbb{C}^n \to V_i$ を射影とする．$E_\lambda = \sum_{\lambda_i \leq \lambda}$ とすると，次のようにして T のスペクトル分解が得られる．

$$T = \sum_{i=1}^{n} TP_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda.$$

定理 2.3 (spectral mapping theorem)**.** A を C*-環 とする．$T \in A,\ f$ を多項式とする．
このとき，$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ となる．

Proof. f が定数でないと仮定する．
$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\lambda - f = a(\lambda_1 - z)\cdots(\lambda_n - z)$ とする．
$\lambda \in \sigma(f(T)) \Leftrightarrow \lambda 1 - f(T)$ が可逆でない $\Leftrightarrow (\lambda_1 1 - T)\cdots(\lambda_n 1 - T)$ が可逆でない $\Leftrightarrow$ ある i があって，$\lambda_i 1 - T$ が可逆でない $\Leftrightarrow \lambda_i \in \sigma(T)$. □

定理 2.4 (continuous functional calculus)**.** A を C*-環 とし $T = T^* \in A$ をとる．
このとき，次を満たすある一意な等長準同型 $\varphi : C(\sigma(T)) \to A$ が存在する．

- $\varphi(1) = \mathrm{id}_H$, $\varphi(z) = T$;
- $\varphi(\overline{f}) = \varphi(f)^*$ $(f \in C(\sigma(T)))$.

このとき，$f \in C(\sigma(T))$ に対し，$f(T) = \varphi(T)$ と定める．

Proof. 多項式 f に対して，$\varphi_0 = f(T)$ と定めたい．
多項式 f_1，f_2 を $\sigma(T)$ 上一致するものとする．$g = f_1 - f_2$ とする．このとき，

$$||g(T)||^2 = ||\overline{g}g(T)|| = r(\overline{g}g(T)) = \sup\{|\lambda|\,|\lambda \in \sigma(\overline{g}g(T))\} = \sup\{|\lambda|\,|\lambda \in \overline{g}g(\sigma(T))\} = ||f||_{C(\sigma(T)),\infty} = 0$$

となり，well-defind である．
同様にして，等長であることが示せる．従って，$C(\sigma(T))$ 全体に等長に拡張される．これが求める φ である． □

注 3. この定理から，id_H と自己共役作用素 T によって生成された C*-環 $C^*(\mathrm{id}_H, T)$ は $C(\sigma(T))$ と同型になる．

より強く，次のことが言える．

定理 2.5. 任意の可換 C*-環 A に対して，ある局所コンパクト空間 Ω が存在して，A は $C_0(\Omega)$ と同型になる．ただし，$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) | \forall\epsilon > 0, \{\omega \in \Omega | |f(\omega)| \geq 0\}$ がコンパクト $\}$ である．$a \mapsto \hat{a}$ と書く．特に，単位元を持つとき Ω はコンパクトハウスドルフ空間としてよい．

定義 2.6. 部分集合 $A \subset B(H)$ に対し，$A' := \{x \in B(H) | ax = xa (a \in A)\}$ と定める．
C*-環 M が $M'' = M$ を満たすとき，*von Neumann* 環という．
$P(M) := \{p \in M|$ 射影 $\}$

注 4. · 一般に，$C \subset C''$ である．
· C*-環 A が可換であるとき，$C \subset C'$ である．

命題 2.7. $M \subset B(H)$ を C*-環 とする．
このとき，$M = M''$ であることと $M = \overline{M}^s$ であることは同値である．

Proof. $x \in \overline{M}^s$ をとる．ある x に強収束するネット $\{x_i\}_{i \in I}$ が存在する．
任意の $y \in M'$ に対して，$x_i y = y x_i$ となる．両辺の極限をとると，$xy = yx$ となり，$x \in M'' = M$ となる．
次に $x \in M''$ をとる．$\xi \in H$ と $\epsilon > 0$ をとる．
$p : H \to [M\xi]$ とする．$y \in M$，$\eta \in H$ に対して，$yp(\eta) = pyp(\eta)$，$py(\eta) = pyp(\eta) + py(1-p)(\eta) = pyp(\eta)$.
2 つ目の式の 2 つ目の等号は任意の $\zeta \in H$ に対し，$\langle py(1-p)(\eta), \zeta\rangle = \langle (1-p)(\eta), y^* p\zeta\rangle = 0$ であることから，$py(1-p)(\eta) = 0$ が従うのでよい．従って，$p \in M'$ である．
$y(\xi) = yp(\xi) = py(\xi) \in [M\xi]$ となるので，ある $m \in M$ が存在して，$||(m - x)\xi|| < \epsilon$ となる．
M の n 個直和 $M \oplus \cdots \oplus M$ は $H \oplus \cdots \oplus H$ 上の von Neumann 環となるので，同様の議論から $x \in \overline{M}^s = M$ が従う． □

例 4. $(\mathrm{L}^\infty([0,1]))$
μ を *Lebesgue* 測度とすると，$C([0,1])$ は $\mathrm{L}^2([0,1],\mu)$ 上の C*-環 となる．
実は，$C([0,1])'' = \overline{C([0,1])}^s = \mathrm{L}^\infty([0,1],\mu)$ となり，*von Neumann* 環になる．

注 5. $C([0,1])$ のノルムは一様収束に対応するものであり，$\mathrm{L}^\infty([0,1])$ の強位相は各点収束に対応するものである．

($\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ の構成)．Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ に対して，ある $\sigma(T)$ 上の次数値連続関数の単調減少列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で χ_E に各点収束するものが存在する．
$\{f_n \quad (T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少，下に有界なのである $\chi_E(T) \in B(H)$ に強収束する．
$E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda]}(T)$ と定めると，これが求めるスペクトル族になる． □

注 6. スペクトル分解から *von Neumann* 環 M に対して，$M = \overline{spanP(M)}^{||\cdot||}$.

定義 2.8. M を *von Neumann* 環とする．
$M_* := \{\varphi \in M^* | \sigma\text{-}w\text{-連続} \}$,
$M_*^+ := \{\varphi \in M_* | \varphi(x^*x) \geq 0\}$
と定める．

注 7. $\varphi \in M^*$ に対して，$\varphi \in M_*$ であることと任意の互いに直交した射影たち $\{p_i\}_{i\in I}$ に対して，$\varphi(\sum_{i\in I} p_i) = \sum_{i\in I} \varphi(p_i)$ であることは同値である．ここで，$\sum_{i\in I} p_i$ は強収束の意味で定義されている．

$\mathrm{L}^\infty([0,1])$ の射影は Borel 集合 E を用いて，χ_E と表される．つまり，$\mathrm{L}^\infty([0,1])$ の射影は σ-加法族に対応している．さらに，測度は σ-加法性をもち，これは M_* の同値条件に対応している．
従って，M_*^+ は非可換測度を表すと考えられる．

3 Egorov の補題

定理 3.1 (Egorov の補題)**.** $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ を有限測度空間とする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，f を可測函数とし，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f にほとんどいたる所で収束するとする． このとき，任意の $\epsilon > 0$ 対して，ある $\mathcal{F}$ の元 A が存在して，$\mu(\Omega - A) < \epsilon$ であり，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に A 上一様収束する．

定理 3.2 (非可換 Egorov の定理)**.** (M,H) を *von Neumann* 環とし，A を M の有界部分集合とする．$a \in \overline{A}^s$，$\varphi \in M_{*,+}$，$e \in P(M)$，$\epsilon > 0$ とする． このとき，$e_0 \in P(M)$ で $e_0 \leq e$ と A の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty} ||(a - a_n)e_0|| = 0$，$\varphi(e - e_0) < \epsilon$ なるものが存在する．

補題 3.3. *(M,H)* を *von Neumann* 環とする．$\{x_i\} \subset M$ を $x_0 \in M$ に強収束する有界ネットとする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\{e_i\} \subset P(M)$ を id_H に強収束するネットで，$||(x_i - x)e_i|| \leq \epsilon$ なるものが存在する．

Proof. 有界性より，$||x_i|| \leq 1$，$\{x_i - x_0\}$ を考えることで $x_0 = 0$ としてよい．
$y_i = {x_i}^* x_i$ とする．$e_i = \chi_{[0,\epsilon]}(y_i)$ とする．$\mathrm{id}_H - e_i \leq \frac{1}{\epsilon^2} y_i$ より，$\{e_i\}$ は id_H に強収束する．
$||x_i e_i||^2 = ||e_i y_i e_i|| \leq ||y_i e_i|| \leq \epsilon^2$ となるので，この $\{e_i\}$ は条件を満たす．
□

非可換 Egorov の定理の証明は次のようになる．

Proof. $e = 1$，$a = 0$ として示せばよい．
$\{a_n\}$ を帰納的に構成する．
$\{a_i\}_{\imath\in I}$ を 0 に強収束するネットとする．補題より，射影から成るネット $\{e_i\}_{i\in I}$ で $||a_i e_i|| \leq \frac{1}{2}$ であり 1 に強収束するものが存在する．φ は σ 弱連続なので，ある $i_1 \in I$ があって，任意の $i_0 \leq i$ に対して，$|\varphi(1 - i)| < \frac{\epsilon}{2}$ となるものが存在する．
$e_1 = e_{i_1}$ とする．${b_i}^{(1)} = e_1 {a_i}^* a_i e_i$ とすると，$\{{b_i}^{(1)}\} \subset e_1 M e_1$ は 0 に強収束する有界ネットになる．再び補題から，ある射影から成るネット $\{e_i(1)\}_{i\in I} \subset e_1 M e_1$ で $||{a_i}^{(1)} {e_i}^{(1)}|| \leq \frac{1}{2^2}$ であり 1 に強収束するものが存在する．ある $i_2 \leq i_1$ があって，任意の $i_2 \leq i$ に対して，$|\varphi(e_1 - {e_i}^{(1)})| < \frac{\epsilon}{2^2}$ となるものが存在する．

$e_2 = e_{i_2}{}^{(1)}$ と定める．
このようにして，M の射影の単調減少列 $\{e_n\}$ と $\{i_n\}$ で $||a_i e_n|| \frac{1}{2^n}$ $(i \leq i_n)$ であり，$|\varphi(e_n - e_{n+1})| < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ となるものが存在する．$e_0 = s\text{-}lim\, e_n$ とすると，$|\varphi(1 - e_0)| < \epsilon$ であり，$||a_{i_n} e_n|| \leq \frac{1}{2^n}$ となる．

□

非可換 Egorov の定理から非可換 Lusin の定理を導くことができる．

定理 3.4 (Lusin の定理)**.** 同じ仮定とする．f を可測函数とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ 対して，ある $\mathcal{F}$ の元 A が存在して，$\mu(\Omega - A) < \epsilon$ であり，f は A 上連続である．

定理 3.5 (非可換 Lusin の定理)**.** A を C*-環 とし，$M = \overline{A}^s$ とする．$0 \neq \varphi \in M_{*,+}$，$0 \neq e \in P(M)$，$\epsilon$，$\delta > 0$ とする．任意の $a \in M$ に対して，$e \geq e_0 \in P(M)$ と $a_0 \in A$ で $ae_0 = a_0 e_0$，$||a_0|| \leq (1+\delta)||ae_0||$ なるものがある．

次のように有限測度空間との対応が考えられる．

Ω:局所コンパクト空間	id_H
$\mathcal{F}$:$\sigma-$ 加法族	P(M)
μ:有限測度	φ $(\in M_{*,+})$
連続関数	A:C*-環
有界可測関数	M:von Neumann 環

H 上の有限次元射影 e を用いて，M_*^+ として $Tr(\cdot e)$ をとると，対の Transitivity theorem が導かれる．

定理 3.6 (Transitivity Theorem)**.** A を *Hilbert* 空間 H 上の C*-環 とする．A が既約に作用しているとき，H 上の任意の有限次元射影 e に対して，$Ae = B(H)e$ となる．