Stone の表現定理

@paper3510mm*

2019 年 2 月 20 日

これは Stone の表現定理についてのノートである．Stone の表現定理は，ふつうブール代数に関するものを指して呼ぶが，ブール代数はブール環と等価な概念である*1(ブール代数の圏とブール環の圏は圏同型である) から，ブール環を用いても記述できる．この記事では，第 1 節でブール代数に関する Stone の表現定理について解説し，第 2 節でブール環に関する Stone の表現定理について解説する．備忘録のため，それぞれの節は独立して読めるようにした．束論的な議論か，環論的な議論かの違いで，内容や証明はほとんど同じである．

この記事を通じて，基本的な位相空間論と圏論の知識を仮定する．1 節ではブール代数の基礎事項について解説するが，2 節では環論の基礎的な部分は仮定する．

目次

* Twitter: `https://twitter.com/paper3510mm`. 間違いなどあればこちらまでお願いします．

*1 ブール代数 B に対して，和を $a+b=(a\wedge\neg b)\vee(\neg a\wedge b)$ とし積を $a\cdot b=a\wedge b$ とすることで，ブール環 $(B,+,\cdot,0,1)$ が対応する．逆にブール環 A に対して，join を $a\vee b=a+b+ab$ とし meet を $a\wedge b=ab$ とし補元を $\neg a=1+a$ とすることで，ブール代数 $(A,\vee,\wedge,\neg,0,1)$ が対応する．

1　A. ブール代数とストーン空間の双対性

1.1　ブール代数

ブール代数を定義する前に，束について復習しよう．

> **定義 1.1.** $(P, \leq)$ を順序集合とする．部分集合 $S \subseteq P$ に対して，元 $a \in P$ が S の上界であるとは，任意の $s \in S$ に対し $s \leq a$ を満たすときをいう．S の上界 a が最小上界である，すなわち任意の S の上界 a' に対して $a \leq a'$ が成り立つとき，a は S の join であるといい $a = \vee S$ とかく．
>
> 双対的に，部分集合 $S \subseteq P$ に対して，元 $b \in P$ が S の下界であるとは，任意の $s \in S$ に対し $b \leq s$ を満たすときをいう．S の下界 b が最大下界である，すなわち任意の S の下界 b' に対して $b' \leq b$ が成り立つとき，b は S の meet であるといい $b = \wedge S$ とかく．

特に，$\{a, b\} \subseteq P$ に対しては，$\vee\{a, b\} = a \vee b$，$\wedge\{a, b\} = a \wedge b$ とかく．$S = \emptyset$ のとき，S の join と meet が存在すれば，これらはそれぞれ P の最小元，最大元となる．

> **定義 1.2.** 順序集合 P が束 (lattice) であるとは，P がすべての有限 join と有限 meet を持つ，すなわち任意の P の有限部分集合に対して join と meet が存在するときをいう．P が束のとき，特に $\emptyset \subseteq P$ の join と meet として，最小元と最大元が存在する．束 P の最小元，最大元を，それぞれ $0 = \vee\emptyset$，$1 = \wedge\emptyset$ と表す．

> **定義 1.3.** P と Q を束とする．写像 $v \colon P \to Q$ が束準同型 (lattice homomorphism) であるとは，すべての有限 join と有限 meet を保つときをいう．すなわち
>
> $$v(a \vee b) = v(a) \vee v(b), \quad v(a \wedge b) = v(a) \wedge v(b), \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 1$$
>
> をみたすもののこと．$a, b \in P$ に対して $a \leq b$ であることと $a \vee b = b$ であることは同値だから，束準同型は順序を保つことに注意する．
>
> 束と束準同型のなす圏を，Lat で表す．

> **命題 1.4.** 束準同型 $v \colon P \to Q$ が圏 Lat の同型射である必要十分条件は，全単射であることである．

証明．必要性は明らか．v が同型であるためには，v が全単射なことで十分であることを示す．

v は全単射だから，逆写像 $u \colon Q \to P$ が存在する．$1 = v(1), 0 = v(0)$ より，$u(1) = 1, u(0) = 0$ である．$a, b \in Q$ に対して，$vu(a \wedge b) = a \wedge b = vu(a) \wedge vu(b) = v(u(a) \wedge u(b))$ より，$u(a \wedge b) = u(a) \wedge u(b)$ が成り立つ．同様に $u(a \vee b) = u(a) \vee u(b)$ もわかり，u は束準同型となる．この u は Lat における v の逆射を与え，v は同型である．□

束においては $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ が成立する:なぜなら，$b \vee c \geq b, c$ より $a \wedge (b \vee c) \geq$

$a \wedge b, a \wedge c$ であり，$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ となるからである．逆の不等号は一般には成り立たない．

定義 1.5. 束 P が分配束 (distributive lattice) であるとは，すべての $a, b, c \in P$ に対して

$$\text{分配律} : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$\text{双対分配律} : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

が成り立つときをいう[*2]．

定義 1.6. 束 P の元 a に対して

$$a \wedge x = 0, \quad a \vee x = 1$$

をみたす元 x を，a の補元という．

補題 1.7. 分配束において，a の補元は，存在すれば一意である．

証明. x と y が a の補元だとすると，$x = x \wedge 1 = x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$ となる．同様に $y = y \wedge x$ が示せるから，$x = y$ となる． □

分配束における，この一意的な a の補元を $\neg a$ とかく．補元の一意性から，分配束においては明らかに $\neg\neg a = a$ が成り立つ．

定義 1.8. ブール代数 (Boolean algebra) とは，すべての元が補元を持つような分配束のこと．ブール束 (Booelan lattice) ともいう．

たとえば，二元集合 $2 = \{0, 1\}$ は最大元と最小元のみを持つブール代数とみなせる．集合 A に対し，そのベキ集合 $\mathcal{P}(A)$ は集合の包含関係を順序としてブール代数をなす．位相空間 X の開集合系を $\mathcal{O}(X)$ とかくと，これは分配束となるがブール代数ではない．位相空間 X の閉かつ開な集合 (clopen set) 全体を $\mathrm{clop}(X)$ とおけば，これはブール代数となる．

ブール代数においても，de Morgan の法則が成り立つ．

命題 1.9 (De Morgan の法則)**.** ブール代数において

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$
$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

が成立．

[*2] 実は分配律の成立を仮定するだけでも定義としては十分である．つまり分配律が成り立つ束は，双対分配律も成立：$a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$(吸収律) が成り立つことと分配律より，$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) = (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$ となる．

証明. 演算 $\wedge, \vee$ が結合的であることと分配律より

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &= ((a \wedge b) \wedge \neg a) \vee ((a \wedge b) \wedge \neg b) \\
&= ((a \wedge \neg a) \wedge b) \vee (a \wedge (b \wedge \neg b)) \\
&= (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) \\
&= 0 \vee 0 = 0 \\
(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) &= (a \vee (\neg a \vee \neg b)) \wedge (b \vee (\neg a \vee \neg b)) \\
&= ((a \vee \neg a) \vee \neg b)) \wedge (\neg a \vee (b \vee \neg b)) \\
&= (1 \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee 1) \\
&= 1 \wedge 1 = 1
\end{aligned}$$

となり，補元の一意性から $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ を得る．$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ も同様に示せる． □

補題 1.10. ブール代数からブール代数への束準同型 $v\colon A \to B$ は演算 $\neg$ を保つ．

証明. 任意の $a \in A$ に対して，$a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$ であるから，$v(a) \wedge v(\neg a) = 0$, $v(a) \vee v(\neg a) = 1$ が成り立ち，補元の一意性より，$v(\neg a) = \neg v(a)$ となる． □

この補題 1.10 より，ブール代数の間の束準同型は，ブール準同型 (Boolean homomorphism) とも呼ばれる．ブール代数とブール準同型のなす圏を BLat で表す．これは Lat の充満部分圏である．

定義 1.11. B をブール代数とする．B の部分集合 F について，F がフィルター (filter) であるとは，

(i) $1 \in F$
(ii) $a, b \in F$ のとき，$a \wedge b \in F$ である
(iii) $a \in F$ かつ $a \leq b$ のとき，$b \in F$ である

をみたすときをいう．特に $F \neq B$ であるフィルター F を真フィルター (proper filter) という．これは $0 \notin F$ であることと同値である．

包含に関して極大な真フィルターを，ウルトラフィルター (ultrafilter) という．

たとえば，ブール代数 B の元 a に対して

$$a^{\uparrow} = \{b \in B \mid a \leq b\}$$

はフィルターである．これを a で生成される単項フィルター (principal filter generated by a) という．$a \neq 0$ なら $a^{\uparrow}$ は真フィルターである．同様に，部分集合 $S \subseteq B$ が有限の meet で閉じるとき，S で生成されるフィルターが

$$S^{\uparrow} = \{b \in B \mid \exists a \in S,\, a \leq b\}$$

によって定まる．

命題 1.12. ブール代数 B の真フィルター F に対して，

$$F:\text{ultrafilter} \iff \forall a \in B, \quad a \in F \text{ または } \neg a \in F$$

が成立する．このとき，F が真のフィルターであることから，$a \in F$ と $\neg a \in F$ が両方成り立つことはない．

証明. $(\Rightarrow)$: $a \notin F$ とする．B の部分集合 $S = \{b \wedge a \mid b \in F\}$ は有限の meet で閉じるから，S の生成するフィルター $S^{\uparrow}$ が考えられる．明らかに $F \subsetneq S^{\uparrow}$ であり，F は包含に関して極大だから，$S^{\uparrow} = B$ となる．特に $0 \in S^{\uparrow}$ であり，$b \wedge a = 0$ となる $b \in F$ が存在する．このとき

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee \neg a) = (b \wedge a) \vee (b \wedge \neg a) = 0 \vee (b \wedge \neg a) = b \wedge \neg a$$

となるから，$b \leq \neg a$ が成り立ち，$\neg a \in F$ となる．

$(\Leftarrow)$: フィルター F' で，$F \subsetneq F' \subseteq B$ となるものをとる．すると $a \in F' \setminus F$ がとれて，$a \notin F$ より $\neg a \in F$ となる．よって $\neg a \in F'$ となり，$0 = a \wedge \neg a \in F'$，つまり $F' = B$ となる． □

定理 1.13. ブール代数 B の任意の真フィルター F に対して，それを含む ultrafilter が存在する．

証明. Zorn の補題を用いて証明する．真フィルター F に対して，それを含む真フィルター全体の集合を

$$\Sigma = \{F' : \text{proper filter} \mid F \subseteq F'\}$$

とおく．$F \in \Sigma$ だから $\Sigma \neq \emptyset$ である．

空でない全順序部分集合 $\Sigma' \subseteq \Sigma$ を任意にとる．$F_0 = \bigcup_{F' \in \Sigma'} F'$ とおくと，F_0 はフィルターである：

$\because$) まず，$1 \in F'$ より $1 \in F_0$ である．

$a \in F_0$ かつ $a \leq b$ があるとき，まず $a \in F'$ なる $F' \in \Sigma'$ が存在し，F' はフィルターだから $b \in F' \subseteq F_0$ となる．

$a, b \in F_0$ のとき，$a \in F'_1$ なる $F'_1 \in \Sigma'$ と $b \in F'_2$ なる $F'_2 \in \Sigma'$ が存在する．Σ' は全順序だから $F'_2 \subseteq F'_1$ または $F'_1 \subseteq F'_2$ が成り立つ．いずれの場合でも $a \wedge b \in F'_1$ または $a \wedge b \in F'_2$ となり，$a \wedge b \in F_0$ がわかる．

このときフィルター F_0 は Σ' の上界となる．

したがって Zorn の補題より Σ は極大元をもち，これが F を含む ultrafilter となる． □

系 1.14. ブール代数 B の 0 でない元 b に対して，$v(b) = 1$ となるブール準同型 $v\colon B \to 2$ が存在する．

証明. B の元 $b \neq 0$ に対し，真フィルター $b^{\uparrow}$ を考えると，定理 1.13 より $b^{\uparrow}$ を含むような ultrafilter

F が存在する．特に $b \in F$ である．このとき，写像 $v\colon B \to 2$ を

$$v(b) = \begin{cases} 1 & b \in F \\ 0 & b \notin F \end{cases}$$

と定義すると，これはブール準同型である：

∵) まず，$1 \in F, 0 \notin F$ より $v(1) = 1, v(0) = 0$ であることはわかる．

$a, b \in B$ に対して，F がフィルターであることを使うと $v(a \wedge b) = v(a) \wedge v(b)$ がわかる：$a \wedge b \in F$ ならば，$a, b \in F$ となるから $v(a \wedge b) = 1 = 1 \wedge 1 = v(a) \wedge v(b)$ である；$a \wedge b \notin F$ ならば，a, b のうち少なくとも一方は F に属さないから $v(a \wedge b) = 0 = v(a) \wedge v(b)$ である．

さらに，F が ultrafilter であることと命題 1.12 を使うと $v(a \vee b) = v(a) \vee v(b)$ がわかる：$a \vee b \in F$ ならば，$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \notin F$ となり $a \in F$ または $b \in F$ が成り立つから，$v(a \vee b) = 1 = v(a) \vee v(b)$ である；$a \vee b \notin F$ ならば，$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \in F$ となり $a \notin F$ かつ $b \notin F$ となるから，$v(a \vee b) = 0 = 0 \vee 0 = v(a) \vee v(b)$ である．

定義から，このブール準同型 v は $v(b) = 1$ をみたす． □

1.2 Stone の表現定理 (ブール代数 ver.)

B をブール代数とする．B に対して，B からブール代数 2 へのブール準同型の集合を

$$\mathrm{spec}(B) \coloneqq \{\text{ ブール準同型 } v\colon B \to 2\}$$

とおく．これは 2^B の部分集合とみなせる．集合 2 に離散位相を入れて位相空間とし，2^B に積位相を入れると，$\mathrm{spec}(B)$ は 2^B の部分空間として位相空間となる．系 1.14 から，$B \neq 0$ なら $\mathrm{spec}(B)$ は空でない位相空間となる．

$b \in B$ に対して

$$U_b = \{v \in \mathrm{spec}(B) \mid v(b) = 1\}$$

とおく．$p_b\colon 2^B \to 2$ を b 成分の射影とすると，2^B の位相の入れ方から，$p_b^{-1}(1)$ は 2^B の開集合である．よって $U_b = \mathrm{spec}(B) \cap p_b^{-1}(1)$ は $\mathrm{spec}(B)$ の開集合である．

補題 1.15. ブール代数 B の元 a, b に対して，次が成り立つ．

(i) $U_{a\wedge b} = U_a \cap U_b$，$U_{a \vee b} = U_a \cup U_b$

(ii) $U_{\neg b} = \mathrm{spec}(B) \setminus U_b$

(iii) $U_1 = \mathrm{spec}(B)$，$U_0 = \emptyset$

特に開集合 U_b は閉でもある．さらに，$\mathcal{U} \coloneqq \{U_b \mid b \in B\}$ は，位相空間 $\mathrm{spec}(B)$ の開基をなす．

証明. 開集合の族 $\mathcal{U}=\{U_b \mid b\in B\}$ が $\mathrm{spec}(B)$ の開基であることだけ示す．積空間 2^B の位相は，$p_a^{-1}(0), p_b^{-1}(1)$ $(a,b\in B)$ という形の部分集合たちで生成されることを思い出そう．特に，2^B は

$$p_{a_1}^{-1}(0)\cap\cdots\cap p_{a_n}^{-1}(0)\cap p_{b_1}^{-1}(1)\cap\cdots\cap p_{b_m}^{-1}(1)$$

という形の部分集合全体を開基にもつ．したがって，その部分空間 $\mathrm{spec}(B)$ は

$$\begin{aligned}&U_{a_1}^c\cap\cdots\cap U_{a_n}^c\cap U_{b_1}\cap\cdots\cap U_{b_m}\\&=U_{\neg a_1\wedge\cdots\wedge\neg a_n\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_m}\end{aligned}$$

という形の部分集合全体，つまり $\mathcal{U}$ を開基にもつ． □

定義 1.16. 位相空間 X が完全不連結 (totally disconnected) であるとは，任意の部分空間 $C\subseteq X$ に対して，それが連結ならば C は一元集合となるときをいう．言い換えれば，すべての連結成分が一点集合であるもののこと．ここで，空集合は連結でないとする．

命題 1.17. コンパクト Hausdorff 位相空間 X に対して，

$$X\text{ が完全不連結である}\iff X\text{ の開閉集合 (clopen set) からなる開基をもつ.}$$

後者をみたす位相空間は，ゼロ次元 (zero-dimensional) であると呼ばれる．

証明. $(\Leftarrow)$[*3]: 空でない部分空間 $C\subseteq X$ が連結であるとする．$x,y\in C$ について，$x\neq y$ であると仮定すると，X は Hausdorff であるから，

$$\exists U\subseteq X:\text{open},\quad x\in U, y\notin U$$

となる．ここで X は開閉集合からなる開基を持つから，U は clopen であるとして良い．すると $C\cap U$ は C の clopen 集合となるから，C が連結より $C\cap U=\emptyset$ または $C\cap U=C$ が成り立つ．しかし，$x\in U$ より $C\cap U\neq\emptyset$ であり，$y\notin U$ より $C\cap U\neq C$ であるから，これは矛盾である．よって $x=y$ となり C は一元集合となる．したがって X は完全不連結．

$(\Rightarrow)$: $x\in X$ をとる．まず，x を含む clopen 集合全体の共通部分 P について考える．すなわち，x を含む clopen 集合全体の集合を $\mathcal{P}=\{W\subseteq X \mid W\text{ は開閉集合で }x\in W\}$ として，$P=\bigcap\mathcal{P}\coloneqq\bigcap_{W\in\mathcal{P}}W$ を考える．特に，P は閉集合で $x\in P$ である．このとき，任意の閉集合 $F\subseteq X$ に対して，$F\cap P=\emptyset$ ならば，$F\cap W=\emptyset$ となる $W\in\mathcal{P}$ が存在する : 実際，X はコンパクトだから F もコンパクトで，$\{W^c\mid W\in\mathcal{P}\}$ は F の開被覆をなすから，有限個の $W_1,\ldots,W_n\in\mathcal{P}$ が存在して，$F\subseteq W_1^c\cup\cdots\cup W_n^c=(W_1\cap\cdots\cap W_n)^c$ となる．$W'=W_1\cap\cdots\cap W_n$ と置けば，$W'\in\mathcal{P}$ で $F\cap W'=\emptyset$ をみたす．

次に，このことを踏まえて，$P=\{x\}$ となることを示そう．$P\supsetneq\{x\}$ だと仮定する．X は完全不連結であるから P は不連結で，

$$\exists A,B\subseteq P:\text{non-empty closed},\quad A\cap B=\emptyset, A\cup B=P, x\in A$$

[*3] この証明は T_1 性があれば十分である．

となる．X はコンパクト Hausdorff だから正規であり，

$$\exists U, V \subseteq X : \mathrm{open}, \quad U \cap V = \emptyset, A \subseteq U, B \subseteq V$$

となる．$F = X \smallsetminus (U \cup V)$ とおくと，これは $F \cap P = \emptyset$ をみたす閉集合であるから，$F \cap W = \emptyset$ となる $W \in \mathcal{P}$ が存在する．このとき，開集合 $G = U \cap W$ を考えると，

$$\overline{G} = \overline{U \cap W} \subseteq \overline{U} \cap W \subseteq V^c \cap F^c = U \cap V^c \subseteq U$$

だから，$\overline{G} \subseteq U \cap W = G$ となり，G 閉集合でもある．$x \in G$ だから $G \in \mathcal{P}$ であるが，$G \cap B = \emptyset$ より $P \not\subseteq G$ となり，これは矛盾．したがって，$P = \{x\}$ である．

さて，x の開近傍 O を任意にとるとき，$P = \{x\} \subseteq O$ であるから，閉集合 O^c は $O^c \cap P = \emptyset$ をみたす．ゆえに，$O^c \cap W = \emptyset$ となる $W \in \mathcal{P}$ が存在し，このとき $x \in W \subseteq O$ となる．以上より X は $\mathrm{clop}(X)$ を開基にもつ． □

> **定義 1.18.** ストーン空間とは，完全不連結なコンパクト Hausdorff 位相空間のことである．ストーン空間のなす Top の充満部分圏を，Stone とかく．

たとえば，二元集合 $2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れた位相空間は，ストーン空間である．

> **補題 1.19.** 位相空間の間の連続写像 $f, g \colon X \rightrightarrows Y$ に対し，Y が Hausdorff のとき，部分集合 $X' = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である．

証明. Y は Hausdorff であるから，対角集合 $\Delta = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ は閉集合である．連続写像 $(f, g) \colon X \to Y \times Y$ を考えると，$X' = (f, g)^{-1}(\Delta)$ となるから，X' は X の閉集合である． □

> **命題 1.20.** ブール代数 B に対して，$\mathrm{spec}(B)$ はストーン空間である．

証明. まず $\mathrm{spec}(B)$ がコンパクトであることを示そう．ブール準同型とは，集合 B から 2 への写像であるもののなかで $0, 1, \wedge, \vee$ を保つもののことである．それゆえ，

$$\begin{aligned} F_0 &= \{v \in 2^B \mid v(0) = 0\} \\ F_1 &= \{v \in 2^B \mid v(1) = 1\} \\ G_{a,b} &= \{v \in 2^B \mid v(a \wedge b) = v(a) \wedge v(b)\} \\ H_{a,b} &= \{v \in 2^B \mid v(a \vee b) = v(a) \vee v(b)\} \end{aligned}$$

とおくとき，

$$\mathrm{spec}(B) = F_0 \cap F_1 \cap \bigcap_{a,b \in B} G_{a,b} \cap \bigcap_{a,b \in B} H_{a,b}$$

と書ける．2 は Hausdorff だから補題 1.19 より，$F_0, F_1, G_{a,b}, H_{a,b}$ は 2^B の閉集合であり，$\mathrm{spec}(B)$ もそうである．Tychonoff の定理より 2^B はコンパクトだから，閉部分集合 $\mathrm{spec}(B)$ もコンパクトである．

一方，2^B は Hausdorff だから，部分空間 $\mathrm{spec}(B)$ も Hausdorff である．補題 1.15 より，$\mathrm{spec}(B)$ は開閉集合からなる開基 $\mathcal{U}$ をもつから，命題 1.17 より完全不連結でもある．したがって，$\mathrm{spec}(B)$ はストーン空間となる． $\square$

ブール準同型 $f\colon A \to B$ があるとき，写像

$$f^*\colon\ \mathrm{spec}(B) \to \mathrm{spec}(A), \quad v \mapsto v \circ f$$

が定まる．$a \in A$ に対し $(f^*)^{-1}(U_a) = U_{f(a)}$ となるので，この f^* は連続写像である．

これらの対応は，ブール代数の圏からストーン空間の圏への反変関手

$$\mathrm{spec}\colon \mathsf{BLat}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Stone}$$

を定める．

一方で，ストーン空間 X に対して，X の clopen 集合全体の集合

$$\mathrm{clop}(X) = \{\ \text{開かつ閉集合}\ W \subseteq X\}$$

を考えると，これは包含関係による順序でブール代数をなす．

連続写像 $h\colon X \to Y$ があるとき，写像

$$\mathrm{clop}(h)\colon\ \mathrm{clop}(Y) \to \mathrm{clop}(X), \quad W \mapsto h^{-1}(W)$$

が定義でき，これは明らかにブール準同型となる．

これらの対応は，ストーン空間の圏からブール代数の圏への反変関手

$$\mathrm{clop}\colon \mathsf{Stone}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{BLat}$$

を定める．

以上で圏 BLat と圏 Stone の間に双方向の反変関手が得られたが，これらは互いに逆を与える．これを示そう．

まず，ブール代数 B に対して，写像

$$\eta_B\colon B \to \mathrm{clop}(\mathrm{spec}(B)), \quad b \mapsto U_b$$

が存在する．補題 1.15 により，η_B はブール準同型となることもわかり，BLat の射となる．このとき，次が成り立つ．

定理 1.21. 準同型 η_B は，BLat の同型 $B \cong \mathrm{clop}(\mathrm{spec}(B))$ となる．

証明. まず，η_B が単射であることを示す．$a, b \in B$ に対して，$\eta_B(a) = U_a = U_b = \eta_B(b)$ だとすると，$U_{a\wedge\neg b} = U_a \cap U_b^c = \emptyset$ より，

$$\forall\, v\colon B \to 2, \quad v(a \wedge \neg b) = 0$$

である．系 1.14 から $a \wedge \neg b = 0$ でなければならず，このとき

$$a \leq a \vee b = (a \vee b) \wedge 1 = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee b) = (a \wedge \neg b) \vee b = 0 \vee b = b$$

より $a \leq b$ である．同様にして $b \leq a$ もわかり，$a = b$ となる．よって η_B は単射である．

次に，η_B が全射であることを示す．clopen 集合 $U \subseteq \mathrm{spec}(B)$ を任意にとるとき，補題 1.15 より $\mathcal{U} := \{U_b \mid b \in B\}$ が開基をなしているから，ある部分集合 $B' \subseteq B$ が存在して $U = \bigcup_{b \in B'} U_b$ と書ける．また $\mathrm{spec}(B)$ はコンパクトであったから，閉集合 U もコンパクトである．ゆえに，有限個の元 $b_1, \ldots, b_n \in B'$ が存在して $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{b_i} = U_{b_1 \vee \cdots \vee b_n}$ となり，$b = b_1 \vee \cdots \vee b_n$ とおけば $\eta_B(b) = U$ である．よって η_B は全射である．

命題 1.4 より全単射 η_B は同型射である． □

一方，ストーン空間 X の元 $x \in X$ に対して，写像 $\varepsilon_X(x)\colon \mathrm{clop}(X) \to 2$ を

$$\varepsilon_X(x)(W) = \begin{cases} 1 & x \in W \\ 0 & x \notin W \end{cases}$$

と定義すると，簡単な確認から $\varepsilon_X(x)$ はブール準同型になる．$x \in X$ に対して $\varepsilon_X(x) \in \mathrm{spec}(\mathrm{clop}(X))$ を対応させることで，写像

$$\varepsilon_X\colon X \to \mathrm{spec}(\mathrm{clop}(X))$$

が得られる．$W \in \mathrm{clop}(X)$ に対し $\varepsilon_X^{-1}(U_W) = W$ となるから，ε_X は連続写像とわかり，Stone の射となる．このとき，次が成り立つ．

定理 1.22. 連続写像 ε_X は，Stone の同型 $X \cong \mathrm{spec}(\mathrm{clop}(X))$ となる．

証明. まず，ε_X が単射であることを示す．$x, y \in X$ について $x \neq y$ とする．命題 1.17 より X は clopen 集合からなる開基をもつ Hausdorff 空間だから，$x \in W$ かつ $y \notin W$ となる clopen 集合 $W \subseteq X$ が存在する．このとき，$x \in W$ より $\varepsilon_X(x)(W) = 1$ であり，$y \notin W$ より $\varepsilon_X(y)(W) = 0$ であるから，$\varepsilon_X(x) \neq \varepsilon_X(y)$ となる．よって ε_X は単射である．

次に，ε_X が全射であることを示す．$\mathrm{spec}(\mathrm{clop}(X))$ の開基の元 U_W $(W \in \mathrm{clop}(X))$ で空でないものをとる．$U_W \neq \emptyset$ より，$v\colon \mathrm{clop}(X) \to 2$ で $v(W) = 1$ となるものが存在する．$W = \emptyset$ なら $v(W) = 0$ となるはずだから，$W \neq \emptyset$ である．このとき，$\varepsilon_X^{-1}(U_W) = W \neq \emptyset$ となり，$\varepsilon_X(X) \cap U_W \neq \emptyset$ である．よって $\varepsilon_X(X)$ は $\mathrm{spec}(\mathrm{clop}(X))$ で稠密．ここで，X はコンパクトだから $\varepsilon_X(X)$ もコンパクトで，$\mathrm{spec}(\mathrm{clop}(X))$ が Hausdorff よりこれは閉集合となる．したがって，$\varepsilon_X(X) = \mathrm{spec}(\mathrm{clop}(X))$ となり，ε_X は全射である．

以上より ε_X は，コンパクト空間 X から Hausdorff 空間 $\mathrm{spec}(\mathrm{clop}(X))$ への連続全単射となるので，同相写像である． □

定理 1.21，定理 1.22 を，Stone の表現定理 (ブール代数 ver.) という．これらの定理より次がわかる．

系 1.23 (Stone Duality)**.** 関手 spec, clop は，圏同値 $\mathsf{BLat}^{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{Stone}$ を与える．

証明. 族 $(\eta_B)_{B\in\mathsf{BLat}}$ と $(\varepsilon_X)_{X\in\mathsf{Stone}}$ が, それぞれ自然変換 $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{BLat}} \Longrightarrow \mathrm{clop}\circ\mathrm{spec}, \varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Stone}} \Longrightarrow \mathrm{spec}\circ\mathrm{clop}$ をなすことを示せばよい．

まず η_B が B について自然であることを示そう．ブール準同型 $f\colon A \to B$ があるとき，$a \in A$, $v \in \mathrm{spec}(B)$ に対して

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{clop}(f^*)(\eta_A(a)) = (f^*)^{-1}(U_a) &\iff f^*(v) = v\circ f \in U_a \\ &\iff v(f(a)) = 1 \\ &\iff v \in U_{f(a)} = \eta_B(f(a)) \end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{clop}(f^*)(\eta_A(a)) = \eta_B(f(a))$ が成り立ち，図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & \mathrm{clop}(\mathrm{spec}(A)) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{clop}(f^*)} \\ B & \xrightarrow[\eta_B]{} & \mathrm{clop}(\mathrm{spec}(B)) \end{array}$$

は可換である．

次に ε_X が X について自然であることを示そう．連続写像 $h\colon X \to Y$ があるとき，$x \in X$, $W \in \mathrm{clop}(Y)$ に対して

$$\begin{aligned} \varepsilon_X(x)\circ\mathrm{clop}(h)(W) &= \varepsilon_X(x)(h^{-1}(W)) \\ &= \begin{cases} 1 & (x \in h^{-1}(W)) \\ 0 & (x \notin h^{-1}(W)) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & (h(x) \in W) \\ 0 & (h(x) \notin W) \end{cases} \\ &= \varepsilon_Y(h(x))(W) \end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{clop}(h)^*(\varepsilon_X(x)) = \varepsilon_X(x)\circ\mathrm{clop}(h) = \varepsilon_Y(h(x))$ が成り立ち，図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \mathrm{spec}(\mathrm{clop}(X)) \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{clop}(h)^*} \\ Y & \xrightarrow[\varepsilon_Y]{} & \mathrm{spec}(\mathrm{clop}(Y)) \end{array}$$

は可換である． □

1.3 観察

前節では，二つの元からなる集合 2 を，ブール代数とみなしたり，ストーン空間とみなしたりしていた．集合 2 に異なる二つの側面を見出したのである．

その働きをわかりやすくするため，二つの関手を書き直そう．関手 spec は $\mathrm{spec}(B) = \{$ ブール準同型 $B \to 2\}$ で定義されていたから，

$$\mathrm{spec} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{BLat}}(-, 2)$$

と書ける．

> **補題 1.24.** ストーン空間 X において，X の clopen 集合 W は，連続写像 $X \to 2$ と一対一に対応する．

証明. X の clopen 集合 W に対し，写像 $h\colon X \to 2$ を $h(x) = 1 \Leftrightarrow x \in W$ となるように定義すると，$h^{-1}(1) = W, h^{-1}(0) = W^c$ は開集合だから，h は連続写像である．

逆に，連続写像 $h\colon X \to 2$ に対し，部分集合 $h^{-1}(1) \subseteq X$ を考えると，これは開集合かつ閉集合である．

これらの対応が互いに逆射をなすことは容易に確認できる． □

この補題 1.24 より，$\mathrm{clop}(X) = \{$ 連続写像 $X \to 2\}$ とみなせるから，

$$\mathrm{clop} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Stone}}(-, 2)$$

と書ける．

こうして Stone 双対性は，集合 2 を二つの圏 BLat と Stone の対象とみなしたとき，その対象への hom 関手 $\mathrm{Hom}(-, 2)$ によって導かれていることがわかる．

2 B. ブール環とストーン空間の双対性

2.1 Stone の表現定理 (ブール環 ver.)

以下，環といえば単位元をもつ可換環を指す．

環 A に対して，A の素イデアル全体の集合を

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subseteq A \mid \mathfrak{p} \text{ は素イデアル }\}$$

とおく．$A \neq 0$ なら，A は少なくとも一つは素イデアルをもつから，$\mathrm{Spec}(A)$ は空ではない．

イデアル $\mathfrak{a} \subseteq A$ に対して，$\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合 $V(\mathfrak{a})$ を

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

と定める．このとき次がいえる．

> **補題 2.1.** イデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_\nu$ について，次が成立．
>
> (i) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \implies V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$
> (ii) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$
> (iii) $\bigcap_\nu V(\mathfrak{a}_\nu) = V(\sum \mathfrak{a}_\nu)$

> (iv) $V((0)) = \mathrm{Spec}(A)$, $V((1)) = \emptyset$

証明. 省略. □

この補題 2.1 の (ii)〜(iv) から，$\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合族 $\{V(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a}$ はイデアル $\}$ は閉集合の公理をみたすことがわかる．ゆえに，$\{V(\mathfrak{a})\}$ を閉集合系とする位相が $\mathrm{Spec}(A)$ に定まる．この位相を Zariski 位相 (Zariski topology) と呼ぶ．Zariski 位相の入った位相空間 $\mathrm{Spec}(A)$ を，環 A のスペクトル (spectrum) という．位相の入れ方から，$\mathrm{Spec}(A)$ の開集合は，$\mathfrak{a}$ をイデアルとして $V(\mathfrak{a})^c$ という形の集合である．特に $a \in A$ に対し

$$D(a) \coloneqq \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$$

は，$D(a) = V((a))^c$ とかけるから，$\mathrm{Spec}(A)$ の開集合である．こうした形の開集合は $\mathrm{Spec}(A)$ の開基を与えることがわかる：

> **補題 2.2.** $\mathcal{D} \coloneqq \{D(a) \mid a \in A\}$ は，位相空間 $\mathrm{Spec}(A)$ の開基をなす．

証明. 任意の開集合 $U = V(\mathfrak{a})^c$ とその元 $\mathfrak{p} \in U$ に対して，$\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$ より，$a \in \mathfrak{a}$ かつ $a \notin \mathfrak{p}$ となるものが存在し，このとき $\mathfrak{p} \subseteq D(a) \subseteq U$ となる．よって $\mathcal{D}$ は $\mathrm{Spec}(A)$ の開基. □

> **命題 2.3.** 環 A に対して，位相空間 $\mathrm{Spec}(A)$ はコンパクトである．

証明. $\mathrm{Spec}(A)$ の開被覆 $\{V(\mathfrak{a}_\nu)^c\}_\nu$ を任意にとる．$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_\nu V(\mathfrak{a}_\nu)^c$ より $\emptyset = \bigcap_\nu V(\mathfrak{a}_\nu) = V(\sum \mathfrak{a}_\nu)$ となり，$\sum \mathfrak{a}_\nu = (1)$ が成立する．特に $1 \in \sum \mathfrak{a}_\nu$ であるから，ある有限個の元 $f_{\nu_i} \in \mathfrak{a}_{\nu_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ が存在して，$1 = f_{\nu_1} + \cdots + f_{\nu_n}$ となる．このとき，$\sum_{i=1}^n \mathfrak{a}_{\nu_i} = (1)$ となるから，$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^n V(\mathfrak{a}_{\nu_i})^c$ が成り立ち，開被覆 $\{V(\mathfrak{a}_\nu)^c\}_\nu$ は有限部分被覆 $\{V(\mathfrak{a}_{\nu_1})^c, \dots, V(\mathfrak{a}_{\nu_n})^c\}$ をもつ． □

環の準同型 $\varphi\colon A \to B$ があるとき，B の素イデアル $\mathfrak{q}$ に対して $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ は A の素イデアルであるから，写像

$$\varphi^a\colon\ \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A), \quad \mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

が定まる．$b \in A$ に対し $(\varphi^a)^{-1}(D(b)) = D(\varphi(b))$ であるので，この φ^a は Zariski 位相に関して連続写像になる．

これらの対応は，可換環の圏 Ring から位相空間の圏 Top への反変関手

$$\mathrm{Spec}'\colon \mathsf{Ring}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Top}$$

を定める．

> **定義 2.4.** ブール環とは，環 B であって，すべての元がべき等，すなわち
>
> $$\forall x \in B, \quad x^2 = x$$

をみたすもののこと[*4].

ブール環のなす Ring の充満部分圏を，BRing とかく．

たとえば，二元体 $2 = \{0, 1\}$ はブール環である．

補題 2.5. ブール環 B の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して

$$a \notin \mathfrak{p} \iff 1 - a \in \mathfrak{p}.$$

したがって，ブール環においては $D(a) = V((1-a)) = D(1-a)^c$ が成り立ち，開集合 $D(a)$ は閉集合でもある．

証明. まず素イデアル $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p} \neq B$ をみたすから，$1 - a \in \mathfrak{p}$ ならば $a \notin \mathfrak{p}$ である．逆に，$a \notin \mathfrak{p}$ ならば，$a(1-a) = a - a^2 = 0 \in \mathfrak{p}$ より，$\mathfrak{p}$ は素イデアルであるから $1 - a \in \mathfrak{p}$ となる． □

命題 2.6. ブール環 B に対して，$\mathrm{Spec}(B)$ は Hausdorff である．

証明. $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(B)$ について $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ であるとする．すると $a \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}'$ が取れて，上の補題 2.5 より，$\mathfrak{p} \in D(1-a)$ かつ $\mathfrak{p}' \in D(a)$ となる．$D(a) \cap D(1-a) = \emptyset$ だから，$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ は開集合 $D(a)$ と $D(1-a)$ で分離され，$\mathrm{Spec}(B)$ は Hausdorff である． □

定義 2.7. 位相空間 X が完全不連結 (totally disconnected) であるとは，任意の部分空間 $C \subseteq X$ に対して，それが連結ならば C は一元集合となるときをいう．言い換えれば，すべての連結成分が一点集合であるもののこと．ここで，空集合は連結でないとする．

命題 2.8. コンパクト Hausdorff 位相空間 X に対して，

$$X \text{ が完全不連結である} \iff X \text{ の開閉集合 (clopen set) からなる開基をもつ}.$$

後者をみたす位相空間は，ゼロ次元 (zero-dimensional) であると呼ばれる．

証明. ($\Leftarrow$)[*5]: 空でない部分空間 $C \subseteq X$ が連結であるとする．$x, y \in C$ について，$x \neq y$ であると仮定すると，X は Hausdorff であるから，

$$\exists U \subseteq X : \text{open}, \quad x \in U, y \notin U$$

となる．ここで X は開閉集合からなる開基を持つから，U は clopen であるとして良い．すると $C \cap U$ は C の clopen 集合となるから，C が連結より $C \cap U = \emptyset$ または $C \cap U = C$ が成り立つ．しかし，$x \in U$ より $C \cap U \neq \emptyset$ であり，$y \notin U$ より $C \cap U \neq C$ であるから，これは矛盾である．

[*4] 実はブール環の定義には，すべての元がべき等であるだけで十分である．積の可換性はこの性質から導出される：$x, y \in B$ に対して，$x + y = (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + y + xy + yx$ より $xy = -yx$ が成り立つ．特に $y = x$ とすると $x = x^2 = -x^2 = -x$ となるから，$xy = -yx = yx$．よって積は可換である．

[*5] この証明は T_1 性があれば十分である．

よって $x=y$ となり C は一元集合となる．したがって X は完全不連結．

($\Rightarrow$): $x \in X$ をとる．まず，x を含む clopen 集合全体の共通部分 P について考える．すなわち，x を含む clopen 集合全体の集合を $\mathcal{P} = \{W \subseteq X \mid W \text{ は開閉集合で } x \in W\}$ として，$P = \bigcap \mathcal{P} \coloneqq \bigcap_{W \in \mathcal{P}} W$ を考える．特に，P は閉集合で $x \in P$ である．このとき，任意の閉集合 $F \subseteq X$ に対して，$F \cap P = \emptyset$ ならば，$F \cap W = \emptyset$ となる $W \in \mathcal{P}$ が存在する : 実際，X はコンパクトだから F もコンパクトで，$\{W^c \mid W \in \mathcal{P}\}$ は F の開被覆をなすから，有限個の $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{P}$ が存在して，$F \subseteq W_1^c \cup \cdots \cup W_n^c = (W_1 \cap \cdots \cap W_n)^c$ となる．$W' = W_1 \cap \cdots \cap W_n$ と置けば，$W' \in \mathcal{P}$ で $F \cap W' = \emptyset$ をみたす．

次に，このことを踏まえて，$P = \{x\}$ となることを示そう．$P \supsetneq \{x\}$ だと仮定する．X は完全不連結であるから P は不連結で，

$$\exists\, A, B \subseteq P : \text{non-empty closed}, \quad A \cap B = \emptyset, A \cup B = P, x \in A$$

となる．X はコンパクト Hausdorff だから正規であり，

$$\exists\, U, V \subseteq X : \text{open}, \quad U \cap V = \emptyset, A \subseteq U, B \subseteq V$$

となる．$F = X \setminus (U \cup V)$ とおくと，これは $F \cap P = \emptyset$ をみたす閉集合であるから，$F \cap W = \emptyset$ となる $W \in \mathcal{P}$ が存在する．このとき，開集合 $G = U \cap W$ を考えると，

$$\overline{G} = \overline{U \cap W} \subseteq \overline{U} \cap W \subseteq V^c \cap F^c = U \cap V^c \subseteq U$$

だから，$\overline{G} \subseteq U \cap W = G$ となり，G 閉集合でもある．$x \in G$ だから $G \in \mathcal{P}$ であるが，$G \cap B = \emptyset$ より $P \not\subseteq G$ となり，これは矛盾．したがって，$P = \{x\}$ である．

さて，x の開近傍 O を任意にとるとき，$P = \{x\} \subseteq O$ であるから，閉集合 O^c は $O^c \cap P = \emptyset$ をみたす．ゆえに，$O^c \cap W = \emptyset$ となる $W \in \mathcal{P}$ が存在し，このとき $x \in W \subseteq O$ となる．以上より X は $\mathrm{clop}(X)$ を開基にもつ． □

> **命題 2.9.** ブール環 B に対して，$\mathrm{Spec}(B)$ は完全不連結である．

証明. 命題 2.6 より $\mathrm{Spec}(B)$ は Hausdorff であり，補題 2.2，補題 2.5 より $\mathrm{Spec}(B)$ は開閉集合からなる開基をもつから，命題 2.8 (の必要性の証明) より $\mathrm{Spec}(B)$ は完全不連結である． □

> **定義 2.10.** ストーン空間とは，完全不連結なコンパクト Hausdorff 位相空間のことである．ストーン空間のなす Top の充満部分圏を，Stone とかく．

たとえば，二元集合 $2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れた位相空間は，ストーン空間である．

命題 2.3，命題 2.6，命題 2.9 より，ブール環 B に対して，$\mathrm{Spec}(B)$ はストーン空間となっている．このことから，関手 Spec' を BRing に制限することで，ストーン空間の圏への反変関手

$$\mathrm{Spec} \colon \mathsf{BRing}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Stone}$$

が得られる．

一方で，ストーン空間 X に対して，X から離散空間 2 への連続写像の集合を

$$\mathrm{Cont}(X) \coloneqq \{\text{ 連続写像 } f\colon X \to 2\}$$

と置く．この集合 $\mathrm{Cont}(X)$ に，可換環 2 から定まる pointwise な和と積を入れて，可換環とする．すなわち，$f, g \in \mathrm{Cont}(X)$ に対し，$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$，$(fg)(x) = f(x)g(x)$ によって，和 $f+g$ と積 fg を定める．2 がブール環であることから，明らかに $\mathrm{Cont}(X)$ はブール環となる．

連続写像 $h\colon X \to Y$ があるとき，写像

$$h^*\colon \mathrm{Cont}(Y) \to \mathrm{Cont}(X), \quad f \mapsto f \circ h$$

が定まる．これが環準同型となることは容易にわかる．

これらの対応は，ストーン空間の圏からブール環の圏への反変関手

$$\mathrm{Cont}\colon \mathsf{Stone}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{BRing}$$

を定める．

以上で圏 BRing と圏 Stone の間に双方向の反変関手が得られたが，これらは互いに逆を与える．これを示そう．

まず，ブール環 B の元 $b \in B$ に対して，写像

$$\eta_B(b)\colon \mathrm{Spec}(B) \to 2$$

を $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ に対し，$b \in \mathfrak{p}$ なら $\eta_B(b)(\mathfrak{p}) = 0$，$b \notin \mathfrak{p}$ なら $\eta_B(b)(\mathfrak{p}) = 1$ として定義する．定義からただちに，$\eta_B(b)$ が連続であることはわかり，これは $\mathrm{Cont}(\mathrm{Spec}(B))$ の元を定める．$b \in B$ に対して $\eta_B(b) \in \mathrm{Cont}(\mathrm{Spec}(B))$ を対応させることで，写像

$$\eta_B\colon B \to \mathrm{Cont}(\mathrm{Spec}(B))$$

が得られる．簡単な確認により，η_B は環準同型となることもわかり，BRing の射となる．このとき，次が成り立つ．

定理 2.11. 準同型 η_B は，BRing の同型 $B \cong \mathrm{Cont}(\mathrm{Spec}(B))$ となる．

証明. まず，η_B が単射であることを示す．$b \in B$ について $\eta_B(b) = 0$ とすると，定義から

$$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B), \quad b \in \mathfrak{p}$$

である．B はブール環であるから，B のベキ零元根基 $\mathrm{nil}(B) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)} \mathfrak{p}$ は，$\mathrm{nil}(B) = \{0\}$ となる．よって $b = 0$ となり，η_B は単射である．

次に，η_B が全射であることを示す．連続写像 $f\colon \mathrm{Spec}(B) \to 2$ に対して，$U = f^{-1}(1)$ は開かつ閉である．$\mathcal{D} = \{D(b) \mid b \in B\}$ は $\mathrm{Spec}(B)$ の開基であったから，ある部分集合 $B' \subseteq B$ が存在して $U = \bigcup_{b \in B'} D(b)$ となる．また $\mathrm{Spec}(B)$ はコンパクトであったから，閉集合 U もコンパクト

である．ゆえに，有限個の元 $b_1,\dots,b_n \in B'$ が存在して，$U=\bigcup_{i=1}^n D(b_i)=D(b_1\cdots b_n)$ とかける．このとき $b=b_1\cdots b_n\in B$ とおけば，$\eta_B(b)=f$ となることがわかる．よって η_B は全射である． $\square$

一方で，ストーン空間 X の元 $x\in X$ に対して，$\mathrm{Cont}(X)$ の部分集合 $\varepsilon_X(x)$ を

$$\varepsilon_X(x)=\{f\in \mathrm{Cont}(X)\mid f(x)=0\}$$

と定義する．2 が体であることから，$\varepsilon_X(x)$ は $\mathrm{Cont}(X)$ の素イデアルとなることがわかり，これは $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$ の元を定める．$x\in X$ に対して $\varepsilon_X(x)\in \mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$ を対応させることで，写像

$$\varepsilon_X\colon X\to \mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$$

が得られる．$f\in\mathrm{Cont}(X)$ に対し $\varepsilon_X^{-1}(D(f))=f^{-1}(1)$ となるから，ε_X は連続写像とわかり，Stone の射となる．このとき，次が成り立つ．

定理 2.12. 連続写像 ε_X は，Stone の同型 $X\cong \mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$ となる．

証明. まず，ε_X が単射であることを示す．$x,y\in X$ について $x\neq y$ とする．命題 2.8 より X は clopen 集合からなる開基をもつ Hausdorff 空間だから，$x\in W$ かつ $y\notin W$ となる clopen 集合 $W\subseteq X$ が存在する．写像 $f\colon X\to 2$ を，$z\in W$ なら $f(z)=0$，$z\notin W$ なら $f(z)=1$ として定義すると，W が clopen 集合であることから，f は連続写像となる．このとき，定義から $f(x)=0, f(y)=1$ であるので，$f\in\varepsilon_X(x), f\notin\varepsilon_X(y)$ となり，$\varepsilon_X(x)\neq\varepsilon_X(y)$ である．よって ε_X は単射である．

次に，ε_X が全射であることを示す．$\mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$ の開基の元 $D(f)$ $(f\in\mathrm{Cont}(X)))$ で空でないものをとる．$D(f)\neq\emptyset$ より $V((f))\neq\mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$ であるが，これは $(f)\nsubseteq \mathrm{nil}(\mathrm{Cont}(B))$ を意味する．$\mathrm{Cont}(B)$ はブール環だから $\mathrm{nil}(\mathrm{Cont}(B))=\{0\}$ となるので，$f\neq 0$ である．このとき，$\varepsilon_X^{-1}(D(f))=f^{-1}(1)\neq\emptyset$ となり，$\varepsilon_X(X)\cap D(f)\neq\emptyset$ である．よって $\varepsilon_X(X)$ は $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$ で稠密．ここで，X はコンパクトだから $\varepsilon_X(X)$ もコンパクトで，$\mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$ が Hausdorff よりこれは閉集合となる．したがって，$\varepsilon_X(X)=\mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$ となり，ε_X は全射である．

以上より ε_X は，コンパクト空間 X から Hausdorff 空間 $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X))$ への連続全単射となるので，同相写像である． $\square$

定理 2.11，定理 2.12 を，Stone の表現定理 (ブール環 ver.) という．これらの定理より次がわかる．

系 2.13 (Stone Duality)**.** 関手 $\mathrm{Spec},\mathrm{Cont}$ は，圏同値 $\mathsf{BRing}^{\mathrm{op}}\simeq\mathsf{Stone}$ を与える．

証明. 族 $(\eta_B)_{B\in\mathsf{BRing}}$ と $(\varepsilon_X)_{X\in\mathsf{Stone}}$ が，それぞれ自然変換 $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{BRing}}\Longrightarrow \mathrm{Cont}\circ\mathrm{Spec}, \varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Stone}}\Longrightarrow \mathrm{Spec}\circ\mathrm{Cont}$ をなすことを示せばよい．

まず η_B が B について自然であることを示そう．ブール環の間の環準同型 $\varphi\colon A \to B$ があるとき，$a \in A$，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ に対して

$$\begin{aligned}(\eta_A(a) \circ \varphi^a)(\mathfrak{p}) &= \eta_A(a)(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) \\ &= \begin{cases} 0 & (a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})) \\ 1 & (a \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & (\varphi(a) \in \mathfrak{p}) \\ 1 & (\varphi(a) \notin \mathfrak{p}) \end{cases} \\ &= \eta_B(\varphi(a))(\mathfrak{p})\end{aligned}$$

であるから，$(\varphi^a)^*(\eta_A(a)) = \eta_A(a) \circ \varphi^a = \eta_B(\varphi(a))$ が成り立ち，図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{Cont}(\mathrm{Spec}(A)) \arrow[d, "(\varphi^a)^*"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & \mathrm{Cont}(\mathrm{Spec}(B)) \end{tikzcd}$$

は可換である．

次に ε_X が X について自然であることを示そう．ストーン空間の間の連続写像 $h\colon X \to Y$ があるとき，$x \in X$，$f \in \mathrm{Cont}(Y)$ に対して

$$\begin{aligned} f \in (h^*)^{-1}(\varepsilon_X(x)) &\iff h^*(f) = f \circ h \in \varepsilon_X(x) \\ &\iff f(h(x)) = 0 \\ &\iff f \in \varepsilon_Y(h(x)) \end{aligned}$$

であるから，$(h^*)^a(\varepsilon_X(x)) = (h^*)^{-1}(\varepsilon_X(x)) = \varepsilon_Y(h(x))$ が成り立ち，図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(X)) \arrow[d, "(h^*)^a"] \\ Y \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & \mathrm{Spec}(\mathrm{Cont}(Y)) \end{tikzcd}$$

は可換である． □

2.2 観察

前節では，二つの元からなる集合 2 を，ブール環とみなしたり，ストーン空間とみなしたりしていた．集合 2 に異なる二つの側面を見出したのである．

その働きをわかりやすくするため，二つの関手を書き直そう．関手 Cont は $\mathrm{Cont}(X) = \{$ 連続写像 $X \to 2\}$ で定義されていたから，

$$\mathrm{Cont} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Stone}}(-, 2)$$

と書ける．

補題 2.14. ブール環 B において，B の素イデアル $\mathfrak{p}$ は，環準同型 $B \to 2$ と一対一に対応する．

証明． B の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，標準的な全射 $B \to B/\mathfrak{p}$ を考える．このとき整域 $B/\mathfrak{p}$ はブール環であり，$\bar{b} \in B/\mathfrak{p}$ をとると，$\bar{b}(\bar{b} - \bar{1}) = \bar{b^2} - \bar{b} = 0$ だから $\bar{b} = 0$ または $\bar{b} = 1$ となる．つまり $B/\mathfrak{p} \cong 2$ であり，環準同型 $B \to 2$ が得られる．

逆に，環準同型 $\varphi\colon B \to 2$ に対し，イデアル $\mathrm{Ker}(\varphi)$ を考える．準同型定理より $B/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong 2$ となるが，2 は体だから $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は極大イデアルであり，特に素イデアルである．

これらの対応が互いに逆射をなすことは容易に確認できる． □

この補題 2.14 より，$\mathrm{Spec}(B) = \{$ 環準同型 $B \to 2\}$ とみなせるから，

$$\mathrm{Spec} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{BRing}}(-, 2)$$

と書ける．

こうして Stone 双対性は，集合 2 を二つの圏 BRing と Stone の対象とみなすとき，その対象への hom 関手 $\mathrm{Hom}(-, 2)$ によって導かれていることがわかる．

3 結びに

Stone の表現定理を二種類の version で紹介した．あわせて三種類の圏が，共変または反変な圏同値で結ばれることがわかる：$\mathsf{BLat}^{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{Stone} \simeq \mathsf{BRing}^{\mathrm{op}}$．これらを充満部分圏に含むような圏が，それぞれ束の圏 Lat，位相空間の圏 Top，可換環の圏 Ring という，“性格の異なる圏” であることは興味深い．これら三つの圏に住まう特別な対象 2 が，ある程度の役割を担っていると想像することができよう．双方に棲まう特別な対象と，その対象への hom set に構造を入れて作った二つの関手が圏の間の双対性を導いているというこの観察については，続編で詳しく取り上げることとする．

参考文献

[1] 田中俊一，位相と論理，日本評論社，2000.

[2] H. Jung, Boolean Algebras, Boolean Rings and Stone's Representation Theorem, 2017. `http://mathsci.kaist.ac.kr/~htjung/Boolean.pdf`.

[3] M. Dirks, The Stone Representation Theorem for Boolean Algebras, 2011. `http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Dirks.pdf`.

[4] Mark V. Lawson, Classical Stone Duality. `http://www.macs.hw.ac.uk/~markl/1-stone-duality.pdf`.

[5] 檜山正幸，古典論理は可換環論なんだよ - 檜山正幸のキマイラ飼育記 (はてな Blog)，2006-10-28. `http://m-hiyama.hatenablog.com/entry/20061028/1162014043`.