位相のはなし

ゼリー

2013/06/12(Wed)

1　$\mathbb{R}^n$ でのおはなし

def

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x,a) < r\}$

$U \subset \mathbb{R}^n \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in U, \exists r > 0, B(x,r) \subset U$;境界を含まない集合

$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) := \{U \subset \mathbb{R}^n : open\}$

fact

(1)$\emptyset \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

(2)$U_1, U_2, ..., U_m \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \cap_{i=1}^m U_i \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

(3)$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$について $U_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)(\forall \lambda) \Rightarrow \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

def

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$が連続 $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall a \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, d_n(x,a) < \delta \Rightarrow d_m(f(x), f(a)) < \epsilon$

fact

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$が連続 $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

部分集合が open かどうかだけで連続か判断できる。これをもちいて写像の連続性を一般化できないか？？？？

2　位相の定義

def

$X : set, \mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(X) = \{A \subset X\}$

これが (1) から (3) をみたすとき $\mathcal{O}(X)$ は X の位相であるといい、この元を開集合:open-set という

(1)$\emptyset \in \mathcal{O}(X), X \in \mathcal{O}(X)$

(2)$U_1, U_2, ..., U_m \in \mathcal{O}(X) \Rightarrow \cap_{i=1}^m U_i \in \mathcal{O}(X)$

(3)$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$について $U_\lambda \in \mathcal{O}(X)(\forall \lambda) \Rightarrow \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$

E.G

X について $\mathcal{O}_1(X)=\mathcal{P}(X)$ とするとこれは位相
X について $\mathcal{O}_2(X)=\{\emptyset, X\}$ とするとこれは位相
X について $\mathcal{O}_3(X)=\{A^c\subset X||A|<\infty\}\cup\{\emptyset\}$ とするとこれも位相
$|X|=2$ のとき位相は 2 種類、$=3$ の時 29 種類, ...
$X:top-sp, A\subset X$ に対し $\mathcal{O}(A):=\{U\cap A|U\in\mathcal{O}(X)\}$ とするとこれは位相 : 相対位相

<u>def</u>
$X,Y:top-sp$(トポロジカルスペース、位相空間のこと) として $f:X\to Y$: 写像
f : 連続 $\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall U\in\mathcal{O}(Y), f^{-1}(U)\in\mathcal{O}(X)$
これは $\mathbb{R}^n$ の時の一般化になっている
f が同相写像 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ f が全単射かつ連続かつ f の逆写像が連続

3 いくつかの性質と例

<u>def</u>
$X:top-sp$ がハウスドルフ空間である, とは
$\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall a,b:(a\neq b)\in X, \exists U_1,U_2\in\mathcal{O}(X), s.t. a\in U_1, b\in U_2, U_1\cap U_2=\emptyset$

<u>def</u>
$X:top-sp$ が連結 $(connected)\overset{def}{\Leftrightarrow} U_1,U_2\neq\emptyset, U_1\coprod U_2\Rightarrow U_1\ or\ U_2\notin\mathcal{O}(X)$

<u>def</u>
X が $p-conn$(弧状連結)
$\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall a,b\in X, \exists f:[0,1]\to X$: 連続 $s.t. f(0)=a, f(1)=b.(a$ と b を結ぶ連続な道がある)

<u>fact</u>
弧状連結 $\Rightarrow$ 連結

<u>def</u>
$X:top-sp$
$\{U_i\}_{i\in I}$が X の開被覆である $\overset{def}{\Leftrightarrow}\cup_i U_i=X, U_i\in\mathcal{O}(O)$
X がコンパクト空間 $\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\{U_i\}_{i\in I}:X$ の開被覆 $(open-cover)$ について
$\exists\{U_{i_k}\}_{k=1}^k\subset\{U_i\}_i, s.t.\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$が X の $open-cov$: 有限の開集合で覆える

<u>E.G</u>
R^2の単位円の境界を含む部分集合 A に (R^2の通常の位相の) 相対位相を入れた集合、は : ハウスドルフ、コンパクト, 弧状連結, (ゆえに $fact$ より) 連結
R^2の単位円の境界を含まない部分集合 A に (R^2の通常の位相の) 相対位相を入れた集合、は : ハウスドルフ、コンパクトでない (有界だが閉でない), 弧状連結, (ゆえに $fact$ より) 連結
$\{(x,y)\in R^2|y=\sin\frac{1}{x}\}\cup(\{0\}\times[-1,1])$ は, 連結だが弧状連結でない ($(0,0)$ と $\sin\frac{1}{x}$上の点を考えてみよ！

), ハウスドルフ, コンパクトでない
$[0,1]\times\{0\}\cup(\cup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\}\times[0,1])\cup\{(0,1)\})$: 弧状連結でなく連結, ハウスドルフ, コンパクトでない

4　数学という学問のおはなし

(話半分に聞く：読むこと)
ドーナツとコーヒーカップは位相が同じ.
つまりドーナツの形とコーヒーカップの形をしたものがあったらその間に同相写像が作れる！図形の穴の数は同相写像で不変.
位相幾何：位相多様体 $\exists\{U_i\}_i : open-cov, s.t. U_i\simeq V_i : \mathbb{R}^n$ の $open$
微分幾何：微分多様体で同様なもの:但し考える写像は微分同相写像になる.
代数幾何：代数多様体で同様なもの:但し.$U_i\simeq SpecA$

5　位相空間としてみる Spec

時間がないので fact をちょっとだけ.
$SpecA$ はコンパクト
$SpecA$ が連結 $\Leftrightarrow E_A := \{e\in A|e^2=e\}=\{0,1\}$

(end)