物理屋必見微分こーざ

Tomoki UDA

平成 23 年 5 月 16 日

注意: この文書は S2S 例会講義 20110516 において、松本（kagakuma）君が行った講義の板書を、私（t_uda）がその場でとったノートです（つまり私のレジュメではありません）。従って、私（t_uda）は内容の正確さ等について一切責任を持ちません。

0 偏微分

Def 0.0 (1 変数関数の微分)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

が存在して唯一のとき、この値を $x = x_0$ での微分係数と言う。

Notation
この値を、$f'(x_0)$, $f'(x)|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x)|_{x=x_0}$ などと書く。

では 2 変数以上ではどのようにすればよいか？

2 変数関数 $z = f(x, y)$ は、どの方向で微分すればよいかが重要になる。例えば、この曲面 $z = f(x, y)$ の場合は、「 x 方向には下がっている」「 y 方向には下がっている」など。このように、多変数のときは方向を決める必要がある。

x 方向に微分することを考えよう。 2 変数 $f(x, y)$ の場合は、$y = y_0$ に固定して考える。このようにすると、実質 x の 1 変数のみの関数になる。そこで、 x 方向の微分を次のように定義する。

Def 0.1 (x による偏微分)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

が存在するとき、これを f の x による偏微分という。

同様に、 y 方向の微分も次のように定めることができる。

Def 0.2 (y による偏微分)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

が存在するとき、これを f の y による偏微分という。

では、x 方向や y 方向以外の間の方向はどうすればよいだろうか？

Ex. 1

$$f(x, y) := x^3 - 3xy^2$$

とするとき f の偏微分はそれぞれ、次のようになる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -6xy \end{aligned}$$

1 全微分

$f(x, y)$ は十分滑らかとする。つまり、函数を考えるときは十分な微分可能性を仮定する（「微分したい！」と思ったら微分できる）。例えば、2 次曲面を考えるとき、その”坂”のきつさは連続的に変化していると仮定する。

x 方向への微小変化 dx, y 方向への微小変化 dy というものを考える。このとき、点の充分近くは”平面で近似できるハズ”という考え方で、次の全微分形式を導入する。

Def 1.0 (全微分形式)

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

を f の全微分形式と呼ぶ。

Remark
全微分形式は”いまいる点から (dx, dy) だけ動いた時、
f は df だけ変化した”というのを表している。

2 方向微分

Def 2.0 (微分作用素ナブラ)

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

さて、微小変位を表す、次の記号を導入しておく。

$$d\mathbf{x} := \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

すると、微分作用素 ∇ を用いて、f の全微分形式を次のように表せる。

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \nabla f \cdot d\mathbf{x} &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \end{aligned}$$

Def 2.1 (方向微分)
$\mathbf{l}$ を、$||\mathbf{l}|| = 1$ を満たすベクトルとする。この時、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} &:= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{l}) - f(\mathbf{x})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hl_x, y + hl_y) - f(x,y)}{h} \\ &= l_x \frac{\partial f}{\partial x} + l_y \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$